CULEGERI DE PROBLEME DE MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ

SERIE

C. CĂRBUNARU
C. HĂRĂBOR
M. SINGER
I. CHEȘCĂ
M. TRIFU
L. GAIU

# Culegere de probleme de MATEMATICĂ

# ENUNȚURI

# CULEGERE
# DE
# PROBLEME
# DE
# MATEMATICĂ

**Din subiectele date la etapele județene și republicane ale olimpiadelor școlare pentru clasele V—VIII**

**Volumul I — ENUNȚURI ȘI INDICAȚII**

**EDITURA TEHNICĂ**
București, 1990

● **COORDONATORI :**

*Lector univ. dr. BRÂNZĂNESCU VASILE*

*Prof. HĂRĂBOR CONSTANTIN*

*Prof. MITRACHE IOAN*

● **COLECTIVUL DE ELABORARE :**

*Clasa a V-a — prof. CĂRBUNARU CONSTANTIN*

***Algebră :*** *clasa a VI-a — prof. HĂRĂBOR CONSTANTIN*
*clasa a VII-a — prof. CHEȘCĂ IOAN*
*clasa a VIII-a — prof. TRIFU MIRCEA*

***Geometrie :*** *clasa a VI-a și a VIII-a — prof. GAIU LAURENȚIU*
*clasa a VII-a — prof. SINGER MIHAELA*

**Îngrijire editorială :**

Redactor : **ing. ADINA NEGOIȚĂ**
Tehnoredactor : **OLIMPIADA NISTOR**
Desene : **ing. GRIGORE DAN**
Coperta : **STAN BARON**

*Bun de tipar : 9.II.1990. Coli de tipar : 9,50 C.Z. 51.*

ISBN : 973-31-0254-7
973-31-0253-9

**Lucrare executată sub comanda nr. 1417 la Tipografia „Bucureștii Noi", str. Hrisovului nr. 18 A, sectorul 1, București**

## CUVÎNT ÎNAINTE

*Încetul cu încetul, străbătînd secolele într-o ascensiune glorioasă prin faima lui Thales şi Euclid, Arhimede şi Appolonius, matematica a început a se dovedi necesară în cunoştinţele de bază ale unui copil, alături de cunoaşterea şi scrierea literelor. Totuşi, nu s-a bucurat de simpatia unanimă din momentul în care a fost cuprinsă în învăţămîntul elementar, părînd adesea greu accesibilă multor copii, iar unora chiar inaccesibilă. Explicaţia trebuie căutată în primul rînd în modul în care învăţătorul sau profesorul ştiau să-şi cîştige elevii pentru această disciplină ieşită din practica strămoşilor noştri cei mai îndepărtaţi în preistorie.*

*Pe lîngă darul comunicării şi al simpatiei, aşteptat de la fiecare dascăl, mai este necesar ca şi manualul precum şi — în ultimele decenii din ce în ce mai prezente — culegerile de probleme să se bucure de aceleaşi calităţi, ceea ce este mai greu, avînd în vedere că acestea trebuie descoperite de elev prin efortul său personal şi insistent.*

*Psihologii cei mai străluciţi, în frunte cu celebrul Piaget, dovedesc că aptitudinile de înţelegere şi folosire a cunoştinţelor matematice sînt înnăscute în fiecare copil normal şi pot fi cultivate cu succes, mai ales în cadrul colectivităţii şcolare, cu rezultate uneori surprinzătoare prin revelaţia unor vocaţii timpurii.*

*În afară de elevii care învaţă matematica pentru că le este necesară sau pentru că nu o pot evita datorită faptului că în zilele noastre face parte din cerinţele oricărei profesiuni, mai există şi categoria celor cîştigaţi de învăţătorii şi profesorii lor pentru matematică, categorie care începe să se impună. În ţara noastră numărul acestora creşte de la an la an şi este o plăcere pentru oricine iubeşte matematica să constate că rubrica de probleme de curs primar, introdusă de noi de mai mulţi ani în Gazeta matematică, este aşteptată cu nerăbdare de micii rezolvitori dintre care unii devin chiar şi propunători de probleme. Cît priveşte pe elevii gimnaziilor, numărul rezolvitorilor şi al celor care se pregătesc să înfrunte greutăţile olimpiadelor este în continuă creştere, ca şi capacitatea lor de a înţelege şi rezolva probleme din ce în ce mai pretenţioase. Experienţa noastră personală ne prilejuieşte această mare satisfacţie atît prin Gazeta matematică pentru tineret, cît şi prin conducerea olimpiadelor gimnaziale în fiecare an. Este o mare bucurie pe care o încercăm cu toţii la încheierea lucrărilor, cînd sîntem în fericita situaţie*

*de a premia și menționa elevi din cele mai variate centre din țară, centre mari și prestigioase, ca și centre mijlocii sau chiar mici și neașteptate.*

*Pe lîngă pregătirea realizată prin Gazeta matematică, un rol important îl au și culegerile de probleme.*

*Se știe că, o culegere este valoroasă dacă are o structură tematică alcătuită în vederea unui sau unor obiective bine determinate cu caracter didactic. Nu este suficient să se întruchipeze ca o colecție de probleme distribuite pe discipline și pe capitole ale acestora, eventual ordonate într-o gradare a dificultăților. Există numeroase probleme grele, chiar greu abordabile, dar lipsite de conținut, mascate de tehnici speciale nedezvăluite, care desfid nu numai pe începători dar chiar și pe cei experimentați, fără a le aduce, în cazul cînd le-au descifrat și învins, vreo satisfacție a descoperirii unor fapte matematice frumoase, atractive și demne de a fi reținute în cultura personală. Astfel de probleme tehnice trebuie evitate într-o culegere care își ia sarcina de a forma și antrena elevii în vederea unor concursuri și cu atît mai mult cînd se urmăresc țeluri mai modeste, ca cel de a completa cunoștințele din manuale prin probleme lămuritoare și instructive.*

*Inițiativa unui grup de profesori inimoși de a elabora o culegere de probleme dintre cele date la etapele locale, județene și pe țară ale olimpiadelor școlare pentru clasele V—VIII, este foarte inspirată.*

*Această culegere este plină de învățăminte și pentru profesori, care se simt ei înșiși atrași să rezolve unele dintre problemele ce au fost date elevilor lor. Considerăm că aceasta este o calitate ce pune în lumină valoarea micilor concurenți, dintre care o parte au dat unor probleme soluții diferite de cele ale autorilor lor, dovedind o ingeniozitate și o independență în gîndire pe care le credeam potrivite mai ales pentru concurenții olimpiadelor liceale pe care îi admirăm și cu care ne mîndrim.*

*De aceea, editarea acestei culegeri constituie un eveniment de interes național în primul rînd pentru nenumărații elevi pasionați de matematică, elevi care o așteaptă cu înfrigurare și apoi — și nu într-un al doilea rînd mai puțin asiduu — pentru numeroșii profesori din întreaga țară, asaltați ei înșiși de elevii lor și de părinții acestora. Colectivul de autori, format din lector univ. dr. Vasile Brânzănescu și profesorii gradul I : Constantin Hărăbor, Ioan Mitrache, Constantin Cărbunaru, Ion Cheșcă, Laurențiu Gaiu, Mihaela Singer și Mircea Trifu, toți profesori cu o experiență prea bine cunoscută, are și calitatea de a-și iubi profesia și elevii, participînd ei înșiși la emoțiile și strădaniile acestora în concursurile în care se angajează cu acea sportivitate tenace care este cheia izbînzilor.*

*Culegerea de față strînge într-un volum enunțurile și indicațiile, iar în al doilea volum, soluțiile desfășurate ale problemelor date în principal la etapele județene și pe țară ale acestor concursuri, pe care toți le numim olimpiade. Cititorul găsește enunțuri de probleme cu menționarea etapei, locului și datei respective, grupate pe capitole și ordonate după gradul de dificultate, precum și după posibilitățile de folosire a*

*unora în rezolvarea altora, punîndu-se în evidență o filiație tematică, atît de gustată și apreciată de tinerii rezolvitori, cît și de mentorii acestora.*

*Așa cum am mai spus, această culegere reprezintă o continuare a unor preocupări mai vechi ale acestui colectiv de profesori care, de mai mulți ani, urmăresc cu dăruire și pasiune să contribuie prin munca și competența lor la descoperirea talentelor matematice în rîndurile compacte ale elevilor, la creșterea și fructificarea aptitudinilor acestora pentru matematică.*

*Structura ei a fost condiționată prin însăși tematica pentru care a fost concepută, cea a problemelor date la olimpiadele de matematică pentru elevii din gimnaziu. Ceea ce este nou și de apreciat la această culegere este că problemele date la etapele pe țară sînt însoțite în rezolvări și de baremele de notare, fapt care constituie un foarte util ghid atît pentru elevii care se pregătesc pentru concursuri cît și pentru profesorii care îi învață și îndrumă pas cu pas, participînd la eforturile, emoțiile, succesele și insuccesele lor.*

*Un alt merit al acestei culegeri este și acela că elevii și profesorii au posibilitatea de a găsi ușor subiectele complete date la etapele pe țară ale olimpiadelor, prin indicarea numărului de ordine al respectivelor probleme la începutul materialului fiecărei clase, cu excepția clasei a V-a la care nu se ține etapa pe țară. Aceste subiecte pot fi utilizate pentru simularea concursului respectiv în vederea verificărilor preliminare ale loturilor de elevi pentru etapa județeană și pe țară, fie prin folosirea acestor subiecte luate ca atare, fie prin realizarea unor seturi de subiecte asemănătoare.*

*Autorii au avut permanent în față obiectivele majore ale culegerii, care sînt înarmarea elevilor în cadrul cercurilor de matematică, cu metode și tehnici folosite în strategiile cu rezolvare a problemelor, chiar în aceste olimpiade, pregătirea lor pentru a aborda cu succes subiectele ce urmează să fie date la viitoarele olimpiade sau la alte concursuri, precum și informarea lor asupra necesității de a-și măsura timpul de care vor dispune, ordonînd atacarea problemelor începînd cu cele pe care știu să le rezolve.*

*La această strategie contribuie și baremele de notare folosite la etapele pe țară, de care ei vor învăța să țină seama pentru a-și aprecia singuri atît eforturile cît și realizările.*

*În ceea ce privește indicațiile, acestea sînt concentrate, unele fiind un ghid util pentru rezolvitori, fără a intra în amănunte ale metodelor.*

*Soluțiile, în special cele ale problemelor de geometrie, sînt redactate cu grija profesorului pentru a ușura străduințele elevilor și a le sugera punctele dificile ale problemelor. Uneori, cînd acestea implică folosirea mai neașteptată a teoremelor celebre, acestea sînt menționate și chiar demonstrate în sprijinul rezolvitorilor.*

*Un alt merit al culegerii este cel de a sugera cititorilor să consulte indicațiile înainte de a recurge la rezolvări, care sînt cuprinse într-un volum separat. Din aceasta poate rezulta în primul rînd convingerea elevilor că pot rezolva problemele fără alt ajutor, iar în al*

*doilea rînd constatarea că au găsit soluții diferite de cele prezentate în Volumul II — Rezolvări, ceea ce are darul de a le consolida încrederea că pot aborda cu succes concursurile.*

*De asemenea, culegerea este atractivă și pentru cititori care nu sînt angajați în concursuri : elevi de liceu, studenți și chiar profesori sau alți specialiști. Ea arată încă o dată că în matematică problemele cu caracter elementar și chiar foarte elementar pot prezenta obstacole oricui și că, în consecință, granița între matematicile elementare și cele înalte este uneori greu de stabilit. Totodată, astfel de probleme se pot pune în cadrul unor cercetări oricît de înalte și uneori pot pune la încercare abilitatea oricărui cercetător.*

*O mențiune trebuie făcută de asemenea pentru acuratețea figurilor executate de inginerul Dan Grigore cît și pentru inspirația graficianului Stan Baron în proiectarea coperților celor două volume.*

*În aceste condiții putem prevedea acestei noi culegeri un frumos succes, dat fiind faptul că străduințile autorilor ei, care se înscriu în descoperirea aptitudinilor elevilor, pregătirea, stimularea și promovarea lor — ceea ce constituie o cerință primordială pentru orice profesor — își vor găsi împlinirea în utilitatea ei.*

*Nu în ultimul rînd se cuvine să mulțumim Editurii Tehnice pentru publicarea operativă a culegerii, ca un frumos dar oferit copiilor pasionați de matematică, cît și profesorilor acestora.*

**Acad. Nicolae Teodorescu**

# CLASA A V-A

# CAPITOLUL I

# NUMERE NATURALE

## I.1. Ordinea operațiilor

**V.1.** Se consideră numerele naturale mai mari ca 200 și mai mici ca 600 cu cifra zecilor 6. Adunați pe cel mai mic dintre acestea cu cel mai mare dintre acestea.

*(Etapa pe sector, 1986, București)*

**V.2.** Cu cît este mai mare numărul care este de trei ori mai mare ca 300 decît numărul care este cu 150 mai mic ca 15 000 : 100 ?

*(Selectare lot, 1987, București)*

Calculați :

**V.3.** $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6$.

*(Etapa pe sector, 1986, București)*

**V.4.** $1 + 2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 - 3^{50} : 3^{50}$.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.5.** $1 + 2^2 \cdot (3^2 : 9 - 1) : 8 + 1\,987^0$.

*(Etapa pe sector, 1987, București)*

**V.6.** $2^6 + 2^{47} : (2 \cdot 2 \cdot 2^{20})^2$.

*(Etapa pe sector, 1985, București)*

**V.7.** $1^{1\,987} + 3 \cdot 2^3 \cdot 2^2 - 1\,987^{1\,988} : 1\,987^{1\,988}$.

*(Selectare lot, 1987, București)*

**V.8.** $(2 + 2 \cdot 3) \cdot \{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{43} - 2^{46} + [3^{148} : 3^{43} - (3^5)^{21}] + 16\}$.

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

**V.9.** $122 + 12 \cdot \{183 : [(2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)^4 : (2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}) + (2^3)^9 : 16^{18} - 1^{27} \cdot 5^0] - 3^2 \cdot (54 - 2^4 \cdot 3)\}$.

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**V.10.** Scrieți numărul $4 \cdot 16^{993}$ ca o putere cu exponentul 1 987.

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.11.** Așezați în ordine crescătoare numerele : $2^{28}$, $3^{21}$, $4^{14}$.

*(Etapa locală, 1987, Ialomița)*

**V.12.** Reconstituiți înmulțirea :

$$\begin{array}{r} 8**. \\ \times\quad 5* \\ \hline 8** \\ **85 \\ \hline ***8* \end{array}$$

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

## I.2. Probleme care se pot rezolva prin metoda figurativă

**V.13.** Aflați două numere naturale știind că suma lor este mai mică decît 1 985, unul este mai mare ca dublul celuilalt și că sînt mai mari ca $35 + 5^4$.

*(Selectare lot tabără, 1985, București)*

**V.14.** Suma a trei numere este 22. Găsiți numerele știind că primul este de 2 ori mai mare decît al doilea și de trei ori mai mare decît al treilea.

*(Etapa pe sector, 1986, București)*

**V.15.** Aflați trei numere naturale știind că suma lor este 609, primul este de două ori mai mare ca al doilea, iar al treilea este cu 4 mai mare ca primul.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.16.** În trei lăzi sînt 612 kg marfă. În lada A este de două ori mai multă marfă decît în lada B și cu 2 kg mai puțină marfă decît în lada C. Aflați cantitatea de marfă din fiecare ladă.

*(Etapa pe sector, 1985, București)*

**V.17.** Suma a trei numere naturale este 999. Diferența dintre primul și al doilea este egală cu diferența dintre al doilea și al treilea. Aflați numerele.

*(Selectare lot, 1987, București)*

**V.18.** Un elev are vîrsta cu 6 ani mai mare decît jumătate din vîrsta fratelui său mai mare. Care este vîrsta fiecăruia, dacă diferența vîrstelor lor este de 4 ani ?

*(Selectare lot, 1987, București)*

**V.19.** La o acțiune de strîngere a recoltei cei 648 țărani participanți au fost repartizați în trei echipe. Aflați numărul țăranilor din fiecare echipă dacă în prima au fost cu 42 mai mulți decît în a doua, iar în aceasta jumătate din numărul celor din prima și a treia la un loc.

*(Etapa locală, 1987, Olt)*

**V.20.** Suma a patru numere naturale consecutive poate fi 936 ?

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.21.** În două cutii sînt 820 creioane. Dacă din prima cutie s-ar lua 41 creioane și s-ar pune în a doua cutie, atunci în prima cutie ar fi de trei ori mai puține creioane decît în a doua. Cîte creioane sînt în fiecare cutie ?

*(Etapa locală, 1987, Prahova)*

**V.22.** Petre îi spune lui Ionel : dacă mi-ai da un leu din suma ta eu aș avea de două ori mai mult ca tine. Ionel îi spune lui Petre : dacă tu mi-ai da mie un leu atunci am avea sume egale. Ce sumă avea fiecare inițial ?

*(Etapa locală, 1987, Bihor)*

**V.23.** În clasele a V-a A și a V-a B ale unei școli sînt 64 de elevi. Dacă s-ar muta 3 elevi din prima clasă în cealaltă, prima ar avea cu 2 elevi mai mult decît a doua. Cîți elevi sînt în fiecare clasă ?

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**V.24.** Bunicul, tatăl și fiul au, împreună, 103 ani. Peste 3 ani, bunicul va fi de două ori mai în vîrstă decît tatăl, iar acesta de 5 ori mai în vîrstă decît fiul. Ce vîrstă are fiecare în prezent ?

*(Etapa locală, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.25.** Două vapoare pornesc în același timp din portul A către portul B, fiecare cu vitezele medii de 21 km/h și 35 km/h. Unul din ele ajunge în B cu 4 ore înaintea celuilalt. Aflați distanța AB.

*(Selectare lot tabără, 1986, București)*

## I.3. Probleme cu privire la teorema împărțirii cu rest

**V.26.** La „proba" unei împărțiri (cu rest) s-a scris egalitatea $19 = 3 \cdot 5 + 4$. Enumerați deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul.

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.27.** Găsiți cel mai mic dintre numerele naturale care împărțite la 25 dau restul 19.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.28.** Un elev spune că a împărțit pe 2 344 la 123 și a găsit cîtul 18 și restul 130. Faceți „proba" și spuneți dacă este corect.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.29.** Aflați numărul natural pe care dacă-l împărțim la un număr natural mai mic decît 25, obținem cîtul 10 și restul 23.

*(Etapa locală, 1985, București)*

**V.30.** Diferența a două numere naturale este 20. Împărțind cele două numere se obține cîtul 1 și un rest. Aflați restul.

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.31.** Sandu are cu 118 lei mai mult decît Mihai. Dacă suma lui Sandu se împarte la suma lui Mihai, atunci cîtul este 3 și restul 18. Aflați cîți lei are fiecare.

*(Selectare lot, 1986, București)*

# CAPITOLUL II

# UTILIZAREA LITERELOR ÎN CALCUL

## II.1. Mulțimi

**V.32.** Enumerați elementele următoarelor mulțimi:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N};\ 2 < x < 8\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbf{N};\ x \leqslant 7\}$;

b) $(A \cup B) - (A \cap B)$; c) $A - B$; d) $(A \cup B) - A$.

*(Etapa locală, 1987, Harghita)*

**V.33.** Aflați numărul elementelor mulțimilor $A$ și $B$ știind că $A \cap B$ are 4 elemente, $A - B$ are 2 elemente, iar $A \cup B$ are 9 elemente.

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

**V.34.** a) Se dau: $A = \{3;\ 4;\ 5\}$ și $B = \{2;\ 3\}$. Găsiți $A - B$ și apoi $B - A$; b) Se dau două mulțimi nevide, fiecare avînd cîte două elemente. Cîte elemente are diferența lor?

*(Etapa pe sector, 1987, București)*

**V.35.** Se dau: $A = \{x \mid x \in \mathbf{N},\ x = 2^n,\ n < 4\}$,

$B = \{y \mid y \in \mathbf{N}^*,\ y = x - 2,\ x \in A\}$,

$C = \{z \mid z \in \mathbf{N},\ z = y^2,\ y \in B\}$. Calculați:

a) $(A \cup B) \cap C$; b) $(A - B) \cup C$; c) $A - (B \cap C)$.

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**V.36.** Se dau mulțimile : $A = \{1 ; 2 ; 3 ; 5\}$ și $B = \{3 ; 4\}$. Enumerați elementele mulțimii $C = \{x \mid x \in A$ pentru care există $y \in B$ astfel încît $y \geqslant x\}$.

*(Etapa pe sector, 1986, București)*

**V.37.** Cîte elemente are mulțimea $A$, dacă : mulțimea $B$ are 100 elemente, mulțimea $A \cap B$ are 13 elemente, iar mulțimea $A \cup B$ are 1 987 elemente ?

*(Etapa locală, 1987, Cluj)*

## II.2. Factor comun

Calculați :

**V.38.** $15 + 15 \cdot 124$.

*(Etapa pe sector, 1985, București)*

**V.39.** $999 + 999 \cdot 999 + 1\,000$.

*(Etapa pe sector, 1986, București)*

**V.40.** $1\,986 \cdot 25 + 75 \cdot (5\,555 - 3\,569)$.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.41.** $[(11\,984 - 9\,999) \cdot 12 + 1\,985 \cdot 88)] : 100$.

*(Etapa pe sector, 1985, București)*

**V.42.** Se știe că $1\,986^{1\,986} = a$. Calculați $1\,986^{3\,972}$.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.43.** $[(2^6)^4 : 2^3 \cdot (2^6 + 2^6) - 4^6 : 2^{10}] : (2^{28} - 2^2) + 9$.

*(Etapa locală, 1987, Mehedinți)*

**V.44.** Despre trei numere naturale se știe că produsul dintre primul și al doilea număr este 300, iar produsul dintre primul și al treilea este 400. Aflați produsul dintre primul număr și suma celorlalte numere.

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița)*

**V.45.** Stabiliți dacă numărul $(3x + 2)(x + 3)$ este număr natural par oricare ar fi $x$ număr natural.

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**V.46.** Despre trei numere naturale $a$, $b$, $c$, sînt adevărate următoarele afirmații : a) se împarte numărul $a$ la numărul $b$ și se obține cîtul 4 și restul 4, iar $a - b = 5\,965$ ; b) se împarte numărul $c$ la numărul $b$ și se obține cîtul 2 și restul 5. Aflați numerele $a$, $b$, $c$.

*(Etapa pe sector, 1987, București)*

## II.3. Ecuaţii în N

**V.47.** Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $6x + 3x = 9$ ; $x \in \mathbf{N}$ ;

b) $2x = 0$, $x \in \mathbf{N}^*$ ;

c) $0 \cdot x = 0$, $x \in \{0 ; 2 ; 3\}$ ;

d) $0 \cdot x = 5$, $x \in \{2 ; 0 ; 5\}$.

*(Selectare lot, 1986, Bucureşti)*

**V.48.** Aflaţi $x$ astfel încît :

$$x - \{19\,095 : 335 - 2^2 \cdot [2 \cdot 5 + (2^3 \cdot 5^2)^{25} : (2^{73} \cdot 5^{50})]\}^5 \cdot 5 = 5.$$

*(Etapa judeţeană, 1987, Neamţ)*

**V.49.** Aflaţi suma cifrelor numerelor naturale $a$ şi $b$ astfel încît $a + b = 84$.

*(Selectare lot tabără, 1986, Bucureşti)*

**V.50.** Determinaţi $n$ număr natural ştiind că numerele naturale $5n - 3$, $4n - 5$, $3n + 2$ şi $2n + 3$ sînt elementele unei mulţimi cu trei elemente (diferite).

*(Etapa locală, 1987, Prahova)*

**V.51.** Determinaţi cifrele distincte $x$, $y$, $z$ ştiind că $\overline{xx} + \overline{yx} + \overline{zx} = \overline{xy3}$.

*(Etapa locală, 1987, Gorj)*

**V.52.** Poate fi adevărată afirmaţia : $\overline{xx4} \cdot \overline{x4} = \overline{xx036}$ ? (Numerele sînt scrise în baza zece).

*(Selectare lot tabără, 1987, Bucureşti)*

# CAPITOLUL III

# DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

## III.1. Criterii de divizibilitate

**V.53.** Este divizibil cu 10 numărul $a = 6^{1\,987} - 16^{497}$ ?

*(Etapa locală, 1987, Bistriţa-Năsăud)*

**V.54.** Cel mai mare dintre numerele $2^{213}$ şi $3^{142}$ se înmulţeşte cu 24, iar cel mai mic cu 18. Stabiliţi dacă diferenţa numerelor astfel obţinute este divizibilă cu 72.

*(Etapa judeţeană, 1987, Cluj)*

**V.55.** Dacă numărul natural $x$ este un număr par atunci numărul $3x + 44 + 8x$ este număr par?

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița)*

**V.56.** Stabiliți dacă numărul $n$ divide numărul $k = 4^{3n+2} + 3 \cdot 2^{6n+4} - 8^{2(n+1)}$, oricare ar fi $n$ natural.

*(Etapa locală, 1987, Giurgiu)*

**V.57.** Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{4x5y}$, divizibile cu 18 unde $x \neq y$.

*(Etapa pe sector, 1985, București)*

**V.58.** Găsiți cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma $1*9*8*$ divizibil cu 18.

*(Etapa județeană, 1987, Bihor)*

**V.59.** Calculați numărul $S = 1\,980 + \overline{19a8b}$ știind că $S$ se divide cu 18 și că $a \neq b$.

*(Etapa locală, 1987, Gorj)*

**V.60.** Dintre numerele de forma $\overline{71x84y}$ divizibile cu 18, care este cel mai mic și care este cel mai mare?

*(Etapa locală, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.61.** În cazul cînd $n \in \mathbf{N}$ stabiliți dacă numărul $a = 15^n + 3^n \cdot 5^{n+1} + 3^n \cdot 5^{n+2}$ este divizibil cu 31.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**V.62.** Determinați cel mai mic număr natural $n$, astfel încît numărul $a = 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n + 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}$ să fie divizibil cu 45.

*(Etapa județeană, 1987, Satu Mare)*

**V.63.** Se dau numerele: $n_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9$, $n_2 = 11 + 22 + 33 + \ldots + 99$; $n_3 = 111 + 222 + \ldots + 999$. Stabiliți dacă numărul $N = n_1 + n_2 + n_3$ este divizibil cu 41.

*(Etapa județeană, 1987, Brașov)*

**V.64.** Găsiți toate numerele mai mici ca 150 000 care au ultimele patru cifre pe 1 985 și sînt divizibile cu 15.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**V.65.** Fie un număr natural $A = \overline{abcd}$ (scris în baza zece). Dacă $a + c = b + d$ atunci numărul $A$ se divide cu 11?

*(Etapa județeană, 1987, Sălaj, Maramureș)*

**V.66.** Aflați $a$ și $b$ astfel ca suma dintre numărul $\overline{ab}$ și numărul $\overline{ba}$ să fie 132.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**V.67.** Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ știind că $a$ și $c$ sînt impare, $a + c \equiv b$, iar $\overline{abc}$ este divizibil cu 3.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**V.68.** Determinați toate numerele de patru cifre, care împărțite la $\overline{34x}$ să dea cîtul 10 și restul 12, știind că numărul $\overline{34x}$ se divide cu 6.

*(Etapa locală, 1987, Argeș, Harghita)*

**V.69.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{xy}$ pentru care numărul $a = \overline{xy0} + \overline{xxy} + \overline{y0}$ este mai mic decît 1 050 și divizibil cu 4.

*(Etapa locală, 1987, Prahova)*

**V.70.** Un număr natural $a$ se împarte la numărul natural $\overline{x24}$ și se obține restul de forma $\overline{y04}$. Stabiliți dacă numărul $a$ este divizibil cu 4.

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.71.** Stabiliți dacă următoarele două mulțimi sînt disjuncte: $A = \{m^2 \mid m \in \mathbf{N}\}$ și mulțimea $B$ care este formată din numerele naturale de forma $5n + 2$, $5n + 3$, $5n + 7$, $5n + 8$ cu $n \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Brașov)*

**V.72.** Enumerați elementele mulțimilor:

a) $A \equiv \{x \mid x \equiv \overline{3a5b},\ x \vdots 30\}$ și $B \equiv \{y \mid y = \overline{3abb},\ y \vdots 45\}$;

b) $(A \cap B) - (A \cup B)$;

c) $(A \cup B) \cap (B - A)$.

*(Etapa locală, 1987, Dîmbovița)*

**V.73.** Stabiliți dacă numărul $a \equiv 7\,\underbrace{700\ldots044}_{n \text{ cifre}} + 16^{1001(n+16)} \cdot 1001^{16(n+1001)}$ este divizibil cu 55, unde $n \in \mathbf{N}$.

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**V.74.** Este numărul $A = 11^3 + 22^3 + \ldots + 99^3$ divizibil cu 1 331 ? Dar cu 5 ?

*(Etapa județeană, 1987, Sălaj)*

**V.75.** a) Aflați cele mai mici 100 numere naturale consecutive a căror sumă să fie divizibilă cu 105 ; b) Produsul acestor numere este divizibil cu $10^{25}$ ?

*(Etapa județeană, 1987, Gorj)*

**V.76.** Dacă $n$ este multiplu de 3, numărul $x \equiv 111\ldots11$ ($n$ cifre de 1) este divizibil cu 37 ?

*(Selectare lot, 1986, București)*

## III.2 Numere prime. Numere prime între ele

**V.77.** Diferența dintre un număr natural par și un număr prim este 20 000. Care sînt numerele ?

*(Etapa județeană, 1987, Gorj)*

**V.78.** Aflați numerele prime $a$, $b$, $c$, știind că $2a + 3b + 5c = 31$.

*(Etapa județeană, 1987, Satu Mare)*

**V.79.** Aflați numerele prime $a$, $b$, $c$, știind că $2a + 3b + 4c = 62$.

*(Etapa județeană, 1987, Bistrița Năsăud)*

**V.80.** Determinați numerele naturale $x$, $y$, $z$, $t$ prime pentru care $2x + 3y + 4z + 24t = 190$.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**V.81.** Poate fi numărul $2^n \cdot 5^{n+1} + 1$ un număr prim, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ ?

*(Selectare lot tabără, 1985, București)*

**V.82.** Găsiți cel mai mare divizor prim al numărului natural scris în baza zece, $\overline{abab}$, $a \neq b$.

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.83.** Sînt numerele 139 și $\overline{3xy}$, scrise în baza zece, numere prime între ele, oricare ar fi cifrele $x$ și $y$ ?

*(Etapa municipală, 1986, București)*

## III.3. Descompunere în factori

**V.84.** Aflați cel mai mic număr natural de forma $\overline{abcabc}$ care are numai 16 divizori.

*(Etapa locală, 1987, Bihor)*

**V.85.** Găsiți două numere naturale care să nu fie scrise cu cifra zero, dar care prin înmulțirea lor să se obțină 1 000 000.

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.86.** Determinați toate tripletele de numere naturale $x$, $y$, $z$ astfel încît $1 \leq x < y \leq z$ și $x \cdot y \cdot z = 1\,988$.

*(Etapa locală, 1987, Bihor)*

**V.87.** Aflați produsul celor mai mici trei numere naturale consecutive nenule, știind că acesta se divide cu 204.

*(Etapa locală, 1987, Vîlcea)*

**V.88.** Aflați numărul natural $n$, știind că $n-2$ se divide cu 61 și că numărul $n+2$ divide pe 2 431.

*(Etapa locală, 1987, Vîlcea)*

**V.89.** Cu cîte zerouri se termină numărul $a=2^5\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^2$ și care este ultima cifră diferită de zero ?

*(Etapa locală, 1987, Brăila)*

**V.90.** Găsiți ultima cifră a numărului $2^{1987}\cdot 6^{1985}\cdot 5^{1987}\cdot 11^{1986}$.

*(Etapa locală, 1987, Harghita)*

## III.4. Divizori comuni. Multipli comuni

**V.91.** Aflați două numere naturale știind că produsul lor este 722, iar cel mai mare divizor comun al lor este 19.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.92.** Aflați numerele naturale $x$, $y$ astfel încît $0<x<y$, suma lor să fie 72, iar cel mai mare divizor comun 6.

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**V.93.** Aflați un număr natural care să împartă pe rînd numerele 13 417, 11 233 și 33 527 și să se obțină resturile 7, 13 și respectiv 2.

*(Selectare lot tabără, 1986, București)*

**V.94.** Un elev din clasa a V-a, fiind întrebat cîți băieți și cîte fete au participat la faza locală a olimpiadei de matematică, a răspuns : numărul băieților este cel mai mic multiplu comun al elementelor mulțimii $A$, iar numărul fetelor este, de asemenea, cel mai mic multiplu comun al elementelor mulțimii $B$, astfel încît : $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $A\cap B=\{1, 2, 3, 6\}$, $A-B=\{4, 8, 9\}$.

Aflați numărul de fete și băieți participanți la acea fază.

*(Etapa locală, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.95.** La o demonstrație sportivă, tinerii participanți care sînt în număr mai mare decît 270 și mai mic decît 340, se pot așeza în coloane de cîte 5, 6, 12 și 15 tineri. Care este numărul de tineri participanți ?

*(Etapa locală, 1987, Ialomița)*

**V.96.** Ce număr natural cuprins între 2 000 și 3 000 este divizibil cu orice număr natural, cuprins între 1 și 10 ?

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.97.** Determinați numerele naturale mai mici decît 1 000 știind că fiecare se împarte pe rînd la 5, la 6, la 8, la 9, la 10 și apoi la 12 și că se obțin respectiv resturile 4, 5, 7, 8, 9 și 11.

*(Etapa municipală, 1985, București)*

**V.98.** a) Găsiți cifrele $a$, $b$, $c$, diferite două cîte două, astfel încît $\overline{aa}\cdot\overline{bb}\equiv\overline{bcb}$; b) Folosind $a$ și $b$ găsite anterior, aflați cifra $d$ astfel încît: $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=\overline{bdb}$.

**V.99.** Aflați $x, y\in\mathbf{N}$ știind că $3x+4y\equiv 143$ și că: a) $x\mid y$; b) $y\mid x$.

## CAPITOLUL IV

## NUMERE RAȚIONALE POZITIVE

Calculați:

**V.100.**

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}\right):\frac{1}{9};$$

*(Etapa pe sector, 1985, București)*

**V.101.**

$$\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}:\left(1-\frac{5}{6}\right)\right]:\frac{7}{6};$$

*(Etapa locală, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.102.**

a) $\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\right):\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}:\frac{3}{5}\right)$;

b) $\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\right):\frac{3}{4}$;

c) $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{4}$;

*(Etapa municipală, 1985, București)*

**V.103.**

$$\frac{2\,004}{501}+\frac{1\,002}{4\,008}-\frac{313}{626}-\frac{262}{131};$$

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**V.104.** $\left(\frac{327}{654}+\frac{529}{1\,058}+\frac{1\,044}{348}\right)\cdot\frac{372}{1\,488}$;

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.105.** $\frac{12}{13}+\frac{1\,212}{1\,313}+\frac{121\,212}{131\,313}$.

*(Etapa municipală, 1985, București)*

**V.106.** $\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{150}-\frac{1}{200}\right):\frac{1}{300}+\frac{14}{25}\cdot\left(\frac{1}{42}+\frac{5}{36}+\frac{1}{63}\right)\right]$.

*(Etapa județeană, 1987, Maramureș)*

**V.107.** $\dfrac{1-\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{4}+3:1\frac{1}{5}}{\left(\frac{13}{5}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot 1\frac{3}{7}}$.

*(Etapa județeană, 1987, Satu Mare)*

**V.108.** $\dfrac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+3\cdot 6\cdot 12+\ldots+30\cdot 60\cdot 120}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+3\cdot 9\cdot 27+\ldots+30\cdot 90\cdot 270}$.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.109.** $\overline{\frac{a00}{a0}}+\overline{\frac{b00}{b0}}$, unde $a$ și $b$ sînt cifre.

*(Selectare lot tabără, 1987, București)*

**V.110.** Într-un bazin cu capacitatea de 100 dal sînt 0,9 kl de ulei. Știind că din bazin s-a luat $\frac{1}{3}$ din cantitate și apoi s-a adăugat $\frac{1}{4}$ din rest, aflați cîți litri de ulei mai încap în bazin.

*(Etapa județeană, 1987, Gorj)*

**V.111.** Găsiți cîți metri are lățimea și apoi cîți metri are lungimea unui dreptunghi știind că lățimea este cu 28 m mai mare decît o treime din lungime, iar perimetrul este de 9 048 m.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.112.** Un teren al unei ferme a fost repartizat astfel : $\frac{2}{5}$ din teren pentru grîu, $\frac{2}{3}$ din rest pentru porumb, iar restul terenului, 60 ha, pentru sfecla de zahăr. Cîte hectare au fost repartizate pentru grîu și cîte pentru porumb ?

*(Etapa județeană, 1987, Olt)*

**V.113.** Un călător parcurge un drum în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{3}$ din drum, a doua zi 15 km, iar a treia zi $\frac{1}{2}$ din drum. Aflați lungimea drumului și cît a parcurs în fiecare zi.

*(Selectare lot tabără, 1986, București)*

**V.114.** Doi elevi au împreună 234 lei. Dacă primul dă celui de al doilea $\frac{1}{7}$ din cît are, atunci al doilea va avea $\frac{1}{2}$ din cît îi rămîne primului. Cîți lei are fiecare ?

*(Etapa județeană, 1987, Argeș)*

**V.115.** Găsiți trei numere naturale știind că suma lor este 1988, al doilea este o cincime din primul, iar al treilea este egal cu un sfert din diferența dintre primul și al doilea.

*(Etapa județeană, 1987, Brașov)*

**V.116.** Un elev are la C.E.C. o sumă de bani din care ridică $\frac{3}{8}$ pentru a efectua o excursie, din care îi mai rămîn 75 lei. Cu $\frac{3}{5}$ din ce-i mai rămăsese la C.E.C. și cu cei 75 lei cumpără un obiect decorativ. Aflați costul excursiei și al obiectului știind că la C.E.C. au mai rămas, în final, 400 lei.

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița)*

**V.117.** Găsiți un număr știind că suma dintre $\frac{1}{3}$ din el și o pătrime din el este cu 63 mai mare decît o doime din el.

*(Selectare lot, 1987, București)*

**V.118.** Din suma de bani pe care o are, un elev cheltuiește într-o zi jumătate din ea, a doua zi o treime din rest, a treia zi jumătate din noul rest, iar a patra zi, o treime din suma rămasă. După aceste cheltuieli îi rămîn 20 lei. Ce sumă a avut elevul la început ?

*(Etapa locală, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.119.** O brigadă de tractoriști are de arat în trei zile un teren. În prima zi ară $\frac{1}{3}$ din teren, a doua zi ară $\frac{2}{5}$ din rest și încă 54 ha, iar pentru a treia zi a mai rămas $\frac{1}{4}$ din suprafața inițială.

Cîte hectare a avut terenul ?

*(Etapa județeană, 1987, Bihor)*

**V.120.** Găsiți trei numere naturale știind că primul este $\frac{2}{5}$ din al doilea, al doilea este $\frac{7}{3}$ din al treilea, iar suma dintre primul și al treilea este 86.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.121.** Un biciclist parcurge un drum în trei zile. În prima zi parcurge 6 km mai puțin decît $\frac{1}{2}$ din drum, a doua zi $\frac{5}{8}$ din rest, iar în a treia zi, restul de 9 km. Ce lungime are drumul ?

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**V.122.** Două echipe de muncitori, lucrînd împreună, pot termina o lucrare în 24 ore. După ce au lucrat împreună 8 ore, lucrarea a fost terminată numai de o echipă în 48 ore. În cîte ore ar termina lucrarea fiecare echipă, lucrînd singură ?

*(Etapa județeană, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.123.** Aflați aria unui dreptunghi știind că lățimea este cu 25 m mai mare decît $\frac{3}{4}$ din lungime, iar perimetrul este 1 044 m.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**V.124.** Terenul unei ferme se cultivă cu grîu și are forma de trapez cu bazele de 22 km și 180 dam, iar înălțimea de 2 000 m. Acest teren este compus din trei loturi. Al doilea lot are suprafața de două ori mai mare decît primul și cu 25 ha mai mică decît al treilea. Pe primul lot s-au obținut 3 t la hectar, pe al doilea lot 50 q la hectar, iar pe al treilea 4 000 kg la hectar. a) Aflați cîte hectare are fiecare lot ; b) Care este recolta obținută de pe tot terenul fermei ?

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**V.125.** Aflați $x$ astfel încît :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=x\cdot\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right).$$

*(Etapa județeană, 1987, Brăila)*

**V.126.** Pentru care $x \in \mathbf{N}$ avem :

$$\frac{3}{7}<\frac{x+1}{35}<\frac{3}{5}?$$

*(Etapa județeană, 1987, Maramureș)*

**V.127.** Rezolvați ecuația în $Q$:

$$\frac{x}{7\frac{2}{5}-2\frac{1}{5}}\cdot\frac{133{,}25-6{,}3\cdot 7{,}24+38{,}362}{(1+5^{101}):\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{100}:\left(1-\frac{2}{3}\right)^{99}+\frac{5^{49}}{3}:5^{50}\right]}=1.$$

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**V.128.** Rezolvați ecuația:

$$1\cdot x+2\cdot x+3\cdot x+4\cdot x+\ldots+1\,987\cdot x=1\,937\cdot 1\,988.$$

*(Etapa județeană, 1987, Bihor)*

**V.129.** Calculați media aritmetică a numerelor:

$$x=2\cdot(3\cdot 5^2-2^2\cdot 18:3^2+3\cdot 11):2^2-38,$$

$$y=\left(\frac{5}{7}+\frac{55}{77}+\frac{555}{777}\right):\frac{5}{7}+7.$$

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**V.130.** Calculați media aritmetică a următoarelor numere:

$$a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1\,986}+\frac{1}{1\,987},$$

$$b=1+\frac{2}{4}+\frac{4}{6}+\frac{6}{8}+\frac{8}{10}+\ldots+\frac{3\,972}{3\,974}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Brăila, Timiș)*

**V.131.** Determinați numerele naturale de trei cifre în cazul cînd cifra sutelor este $\frac{3}{5}$ din cifra unităților, iar cifra zecilor este media aritmetică a celorlalte două cifre.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**V.132.** Media aritmetică a trei numere naturale este 121. Aflați cele trei numere știind că al doilea număr este cu 27 mai mare decît primul, iar al treilea este de 3 ori mai mare ca al doilea.

*(Etapa județeană, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.133.** Media aritmetică a trei numere este 1 988. Primul este mai mare cu 9 decît al doilea, iar media aritmetică dintre al doilea și al treilea număr este 1 989. Aflați cele trei numere.

*(Etapa locală, 1987, Cluj)*

**V.134.** Aflați numerele naturale $\overline{xyzt}$ știind că $x \equiv 5y$ și că $z = \frac{2}{3}t$.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**V.135.** Găsiți numărul natural $n \neq 0$ știind că diferența dintre numărul 3 și numărul natural $\frac{10-n}{2}$ este un număr natural.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**V.136.** Se dau numerele:

$a = 2^{335} - 2^{334} - 2^{333}$; $b = 3^{224} - 3^{223} - 3^{222}$;

$c = 4^{113} - 4^{112} - 4^{111}$. Scrieți în ordine crescătoare numerele $a$, $b$ $\equiv x$ și $\frac{c}{11}$.

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.137.** Determinați numerele naturale $x$ și $y$ pentru care fiecare din numerele $m = \frac{180}{x^2}$ și $n = \frac{180}{y^3}$ este număr natural.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**V.138.** Determinați numerele naturale $n$ pentru care $\frac{30}{2n+1} \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**V.139.** Găsiți toate numerele $\overline{abc}$ (în baza zece) știind că $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}} = \frac{221}{22}$.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**V.140.** Aflați fracțiile $\frac{\overline{1x7}}{\overline{yx}}$ care se simplifică cu 3.

*(Selectare lot 1987, București; etapa locală, 1987, Ialomița)*

**V.141.** Este numărul $\frac{2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 6^{n+1}}{2^{n+1} \cdot 3^{n+1} + 5 \cdot 6^n}$ un număr natural oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$?

*(Selectare lot, 1986, București)*

**V.142.** Găsiți numărul natural $\overline{abc}$ știind că $\overline{abc} + \frac{\overline{abc}}{10} = 396$.

*(Etapa locală, 1987, Giurgiu)*

**V.143.** Aflați două numere naturale scrise în baza zece, știind că produsul lor este $\frac{\overline{abc\,abc}}{\overline{abc}}$ și că suma lor este mai mare decît 100.

*(Selectare lot tabără, 1985, București)*

**V.144.** Stabiliți dacă fracția $\frac{2n+1}{5n+3}$ unde $n \in \mathbf{N}$, este ireductibilă.

*(Etapa județeană, 1987, Prahova)*

**V.145.** Stabiliți dacă fracția $\frac{7x+12}{3x+5}$ este ireductibilă pentru orice $x \in \mathbf{N}$.

*(Selectare lot, 1987, București)*

**V.146.** Cum se modifică produsul a patru numere raționale dacă primul se mărește cu $\frac{1}{2}$ din el, al doilea se mărește cu $\frac{1}{3}$ din el, al treilea se micșorează cu $\frac{1}{4}$ din el, iar al patrulea se micșorează cu $\frac{1}{3}$ din el?

*(Etapa județeană, 1987, Prahova)*

**V.147.** Calculați:

$$(3 \cdot 15 - 0{,}7 \cdot 60) : (60 : 30 + 0{,}0001 \cdot 10^4) :$$
$$: (0{,}2378 \cdot 10^4 - 237\,500\,000 : 10^5) : 3.$$

*(Etapa locală, 1987, Neamț)*

**V.148.** Aflați $x$ astfel încît:

$$(5{,}6 + 3{,}52 : 3{,}2) \cdot 100 + 5x = 3{,}5 \cdot (2\,020 - 9{,}1 \cdot 200).$$

*(Etapa locală, 1987, Dîmbovița)*

**V.149.** Aflați $x$ știind că:

$$\left\{88 : \left[2{,}5 - \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(2\,\frac{1}{3} + 0{,}75\right) \cdot \frac{6}{37}\right]\right\}^2 + x = 1\,987.$$

*(Etapa județeană, 1987, Mehedinți)*

## INDICAȚII

**V.1.** Care sînt aceste numere ?

**V.2.** După ce efectuați calculele parțiale, formulați din nou problema.

**V.3.** Atenție la ordinea operațiilor.

**V.4.** $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$ ; $3^n : 3^m = 3^{n-m}$, $n > m$.

**V.5.** $4 \cdot 0 = 0$ ; $0 : 8 = 0$ ; $1\,987^0 = 1$.

**V.6.** $(2^m)^n = 2^{m \cdot n}$.

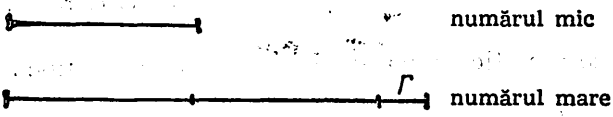
**V.9.** $1^{27} = 1$ ; $5^0 = 1$ ; $(a^{70} \cdot a^{20}) : (a^{30} \cdot b^{10}) = a^{40} \cdot b^{10}$.

**V.10.** Scrieți întîi ca o putere cu baza 2.

**V.11.** Comparați $3^{21}$ cu $4^{14}$ schimbînd bazele.

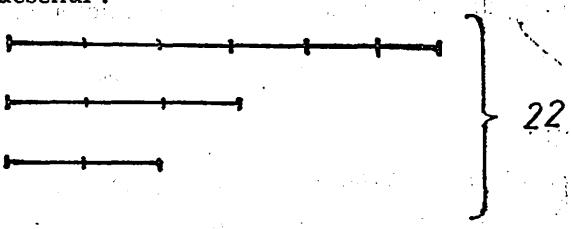
**V.12.** De ce prima cifră a celui de al doilea număr care se înmulțește este 1 ?

**V.13.** Priviți desenul :




Apoi analizați egalitatea $1\,985 = 3 \cdot 661 + 2$.

**V.14.** Priviți desenul :




**V.15.** Folosiți un desen.

**V.16.** La fel.

**V.17.** Realizați un desen care să vă sugereze să calculați al doilea număr. Avem un singur rezultat ?

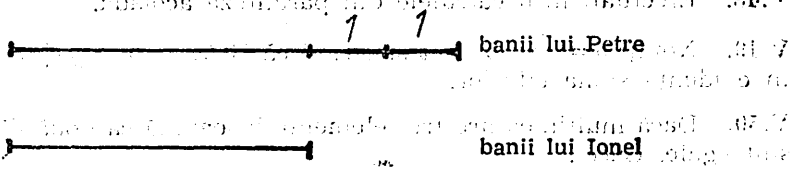
**V.18.** Un desen vă ajută să aflați jumătate din vîrsta persoanei mai „în vîrstă".

**V.19.** Realizați un desen.

**V.20.** Faceți un desen.

**V.21.** Realizați un desen care să ilustreze situația după manevrarea celor 41 de creioane.

**V.22.** Din afirmația lui Ionel către Petre, putem ilustra desenul :




Continuați cu afirmația lui Petre.

**V.23.** Figurați în desen situația după mutare.

**V.24.** Peste 3 ani suma vîrstelor va fi $103 + 3 + 3 + 3$ adică 112 ani.

**V.25.** Calculați distanța dintre cele două vapoare la momentul ajungerii unuia în B.

**V.26.** Atenție la condiția restului.

**V.27.** Nu este numărul $25 \cdot 1 + 19$ !

**V.28.** „Proba" se respectă. Este bine ?

**V.29.** Deoarece restul trebuie să fie mai mic decît împărțitorul, împărțitorul este un număr natural mai mare decît 23.

**V.30.** Realizați un desen.

**V.31.** Folosiți un desen pentru a ilustra teorema împărțirii cu rest în condițiile date de problemă.

**V.32.** Ce înseamnă relația „$<$" ? Dar „$\leqslant$" ?

**V.33.** Realizați diagramele corespunzătoare.

**V.34.** b) Analizați toate situațiile.

**V.35.** Enumerați elementele mulțimilor $A$, $B$, $C$.

**V.36.** Verificați pe rînd elementele mulțimii $A$.

**V.37.** Cîte elemente are $A - B$ ?

**V.38.** Dați factor comun.

**V.39.** Dați factor comun.

**V.40.** Pentru ușurința calculelor, aveți și un factor comun.

**V.41.** Apare un factor comun.

**V.42.** $3\,972 = 2 \cdot 1\,986$.

**V.43.** $2^6 + 2^6 = 2^6 \cdot (1 + 1) = 2^6 \cdot 2$.

**V.44.** Notați numerele cu litere.

**V.45.** Luăm $x$ par și apoi $x$ impar.

**V.46.** Folosim teorema împărțirii cu rest, întîi pentru numerele $a$ și $b$, împreună cu afirmația despre diferență. Un desen vă ajută să rezolvați mai ușor problema.

**V.47.** b) Atenție, $x \in \mathbf{N}^*$. c) $x$ poate fi orice ?

**V.48.** Efectuați întîi calculele din paranteza acoladă.

**V.49.** Notați $a = \overline{xy}$, $b = \overline{zt}$ și scrieți că $10(x + z) + y + t = 84$. Puneți în evidență suma cifrelor.

**V.50.** Dacă mulțimea are trei elemente înseamnă că două din cele patru sînt egale. Care ?

**V.51.** Așezați numerele unele sub altele.

**V.52.** Încercați să faceți înmulțirea.

**V.53.** Stabiliți ultima cifră a lui $a$.

**V.54.** Care din cele două numere este mai mare ?

**V.55.** Dacă numărul natural $a$ este par atunci și numărul natural $b \cdot a$ este număr natural par.

**V.56.** Scrieți puterile cu baza 8 și 4 numai cu baza 2.

**V.57.** Un număr este divizibil cu 18 cînd este divizibil cu 2 și cu 9.

**V.59.** Găsiți numerele $\overline{19a8b}$ divizibile cu 18.

**V.60.** $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Din divizibilitatea cu 9 găsiți $x$.

**V.61.** Dați factor comun pe $15^n$.

**V.62.** Scrieți numărul $a$ sub formă de produs.

**V.63.** Asociați convenabil pentru a obține ca factor comun pe 123.

**V.64.** Căutați numerele de forma $\overline{ab1\,985}$ mai mici ca 150 000, unde $a$ poate fi zero, divizibile cu 3.

**V.65.** $A = 1\,000a + 100b + 10c + d = 990a + 10a + 10c + 100b + d =$
$= 990a + 10(a + c) + 100b + d.$

**V.66.** Găsiți $a$ și $b$ astfel încît $a + b = 12$.

**V.67.** $a$ și $c$ impare implică $a + c$ număr par, deci $b$ număr par.

**V.68.** Aflați numerele de forma $\overline{34x}$.

**V.69.** Numărul $a$ trebuie să fie divizibil cu 4 deci cu 2, rezultă $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

**V.70.** Teorema împărțirii cu rest ne permite să scriem numărul $a$ ca o sumă. Dacă fiecare termen al acestei sume este divizibil cu 4 atunci... Dacă unul din factorii unui produs este divizibil cu 4 atunci...

**V.71.** Găsiți ultima cifră a fiecărui număr din cele două mulțimi.

**V.72.** a) Un număr este divizibil cu 30 dacă este divizibil cu 10 și cu 3. Un număr este divizibil cu 45 dacă este divizibil cu 5 și cu 9.

**V.73.** Numărul $7\,700\ldots044$ ($n$ cifre) este divizibil cu 11. Şi celălalt termen al adunării este divizibil cu 11. De ce ? Pentru divizibilitatea cu 5 se studiază ultima cifră a lui $a$.

**V.74.** Daţi factor comun convenabil. Pentru divizibilitatea cu 5 căutaţi ultima cifră.

**V.75.** a) Avem $S = a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+99) = 50(2a+99)$. b) Nu.

**V.76.** Scrieţi numărul $x$ astfel : $x = 10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \ldots + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1$ etc.

**V.77.** Care număr prim este par ?

**V.78.** Se observă că $2a$ este număr par deci $3b + 5c$ este impar.

**V.79.** Numărul $3b$ este par deci $b$ este par. $b$ este şi prim.

**V.80.** Numărul $3y$ este par, deci $y$ este par şi prim, deci $y = 2$ etc.

**V.81.** Găsiţi un contraexemplu.

**V.82.** Scrieţi numărul $\overline{abab}$ astfel $\overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab}$, apoi mai departe ca produs.

**V.83.** Stabiliţi dacă 139 este număr prim.

**V.84.** Avem $\overline{abcabc} = 1\,001 \cdot \overline{abc}$.

**V.85.** Descompuneţi pe 1 000 000 şi alegeţi cele două numere.

**V.86.** Scrieţi numărul 1 988 sub formă de produs.

**V.87.** Descompuneţi numărul 204 şi veţi observa care sînt numerele naturale consecutive cele mai mici, cerute.

**V.88.** Descompuneţi numărul 2 431 şi aflaţi divizorii lui.

**V.89.** Numărul $a$ are în descompunere pe $2^3 \cdot 5^3$.

**V.90.** Observaţi că numărul este divizibil cu 10.

**V.91.** Fie $a$ şi $b$ numerele. Avem $a = 19a_1$ şi $b = 19b_1$.

**V.92.** $x = 6a$ şi $y = 6b$ unde $a$ şi $b$ sînt numere naturale prime între ele astfel încît $0 < a < b$.

**V.93.** Aplicaţi teorema împărţirii cu rest şi apoi noţiunea de cel mai mare divizor comun (al căror numere ?).

**V.94.** Aflaţi elementele mulţimilor $A$ şi $B$.

**V.95.** Aflaţi multiplul comun al numerelor 5, 6, 12 şi 15.

**V.96.** Numărul cerut este un multiplu comun al numerelor naturale mai mari ca 1 şi mai mici ca 10.

**V.97.** Folosiţi teorema împărţirii cu rest şi găsiţi o concluzie pentru numărul $a + 1$, $a$ fiind numărul cerut.

**V.98.** a) $\overline{aa}$ înseamnă $10a + a$, adică $11a$.

**V.99.** a) $x \mid y$ înseamnă că există un număr natural $a$ astfel încît $x \cdot a = y$. b) Idem.

**V.101.** Ordinea operațiilor se păstrează și pentru numere raționale.

**V.103.** Simplificați fracțiile și apoi adunați.

**V.105.** Se observă că, de exemplu, $121\,212 = 120\,000 + 1\,200 + 12 = 12\,(10\,000 + 100 + 1) = 12 \cdot 10\,101$

**V.108.** Mai scrieți termeni și la numărător și la numitori. Se observă că $1 \cdot 2 \cdot 4$ este factor comun la numărător. La numitor, ce factor comun avem ?

**V.109.** $\overline{a00} = \overline{a0} \cdot 10$ etc.

**V.110.** Calculați, pe rînd, cantitatea care s-a luat, cantitatea care s-a adăugat etc.

**V.111.** Calculați semiperimetrul, apoi, folosiți un desen.

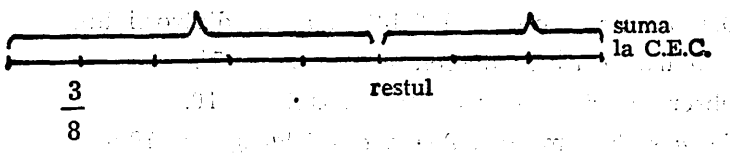
**V.112.** Un desen conduce imediat la rezolvarea problemei.

**V.113.** Figurați datele problemei într-un desen.

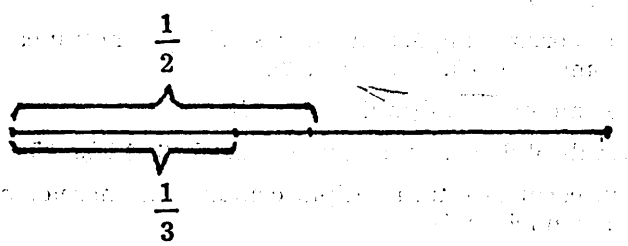
**V.114.** Exprimați suma celor două numere în părți egale, folosind șeptimile respective.

**V.115.** Realizați un desen.

**V.116.** Iată un desen :




**V.117.** Priviți desenul :




pe care încercați să-l completați.

**V.118.** Realizați un desen.

**V.119.** Faceți un desen care să vă comunice ce fracții din teren reprezintă 54 ha.

**V.120.** Transformați fracțiile, în fracții cu un numitor comun.

**V.121.** Realizați un desen.

**V.122.** Împreună, într-o oră, lucrează $\frac{1}{24}$ din lucrare, iar în 8 ore $\frac{1}{24} \cdot 8$ din lucrare.

**V.123.** Calculați cît reprezintă $\frac{1}{4}$ din lungime, ajutîndu-vă de un desen.

**V.124.** a) Amintim formula : $\frac{(B+b)\cdot i}{2}$;

**V.126.** Aduceți la același numitor (comun).

**V.127.** Pentru comoditate calculați al doilea factor de la înmulțirea din membrul stîng al ecuației.

**V.128.** Dați factor comun pe $x$.

**V.129.** Simplificați cu 11 și apoi cu 111 pentru calculul lui $y$.

**V.130.** Simplificați, mai întîi, fracțiile de la numărul $b$.

**V.132.** Media aritmetică a trei numere este 121, înseamnă că suma lor este 363.

**V.133.** Dacă media aritmetică a trei numere este $a$ atunci suma celor trei numere este $3a$. Traduceți altfel problema.

**V.134.** $y$ nu poate fi zero. $y = 1$, $x = 5$.

**V.135.** Folosiți întîi faptul că $\frac{10-n}{2}$ este un număr natural $k$.

**V.136.** $a = 2^{333}$, $b = 3^{222} \cdot 5$ și $c = 4^{111} \cdot 11$.

**V.137.** Scrieți numărul 180 sub formă de produs.

**V.138.** $2n + 1$ trebuie să fie divizor natural al lui 30.

**V.139.** Amplificați fracția $\frac{221}{22}$.

**V.140.** Găsiți numerele $\overline{1x7}$ și $\overline{yx}$ divizibile cu 3.

**V.141.** Scrieți altfel puterile respective.

**V.142.** Numărul $\frac{\overline{abc}}{10}$ trebuie să fie natural deci $c \equiv 0$.

**V.143.** Scrieți ca produs numărul $\overline{abcabc}$.

**V.144.** Dacă $d \mid a$ și $d \mid b$ atunci $d \mid (a - b)$.

**V.145.** Stabiliți dacă numărătorul și numitorul sînt numere prime între ele.

**V.146.** Notăm cu $a$, $b$, $c$, $d$ numerele. Avem :

$$\left(a+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b+\frac{b}{3}\right)\vdots\left(c-\frac{c}{4}\right)\cdot\left(d-\frac{d}{3}\right)$$

# CLASA A VI-A

## SUBIECTELE DATE LA ETAPA REPUBLICANĂ *

ARTA ABAD

**Rîmnicu-Vîlcea, 1986**

1 : VI.A.45 ; 2 : VI.A.19 ; 3 : VI.G.22

**Bacău, 1987**

1 : VI.A.20 ; 2 : VI.A.67 ; 3 : VI.G.53

**Brașov, 1988**

1 : VI.A.68 ; 2 : VI.A.69 ; 3 : VI.G.23

**Baia Mare, 1989**

1 : VI.A.21 ; 2 : VI.A.22 ; 3 : VI.G.46

---

* Se indică numai numărul de ordine al problemei care se găsește la ENUNȚURI.

# ALGEBRĂ

## CAPITOLUL I

## NUMERE NATURALE. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

**VI.A.1.** Pentru a numerota paginile unui volum, un tipograf a utilizat 2 889 de cifre. Cîte pagini are volumul ?

*(Etapa județeană, 1987, Sălaj)*

**VI.A.2.** Un grup de 10 persoane au hotărît să cumpere un cort pe care să-l folosească pe rînd, în excursii. Cheltuiala ar fi fost mai mică cu 100 lei de persoană dacă grupul ar fi fost format din 12 persoane. Care a fost contribuția fiecăruia dintre cei zece ? Se cere și soluția aritmetică.

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VI.A.3.** Să se determine numerele prime $a$, $b$, $c$, pentru care $2a + 3b + 4c = 30$.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu, Vaslui)*

**VI.A.4.** Să se determine numerele naturale $m$, $n$, $p$, cu $m < n < p$ astfel încît $2^m + 2^n + 2^p = 2\,336$.

*(Etapa județeană, 1987, Dolj)*

**VI.A.5.** Să se afle cifrele $a$, $b$, $c$, $x$ (în baza zece) știind că $a \cdot \overline{bc} = \overline{xxx}$.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj-Napoca)*

**VI.A.6.** Determinați numărul $\overline{abcd}$, pătrat perfect, știind că $\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot \overline{bd}$.

*(Etapa județean, 1987, Călărași)*

**VI.A.7.** Găsiți cinci numere naturale care să se bucure de proprietatea că suma cifrelor este egală cu produsul cifrelor. Sînt multe asemenea numere ?

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VI.A.8.** Să se arate că nu există nici un număr natural $x$ astfel încît $1\,987^{1\,987} = 2^x + 3$.

*(Etapa județeană, 1987, Tulcea)*

**VI.A.9.** Suma mai multor numere naturale distincte este 1 987.

a) Să se arate că suma conține un număr impar de numere impare.

b) Să se arate că cel puțin un număr este mai mare strict decît 62.

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**VI.A.10.** Să se determine numerele de forma $\overline{abc}$ astfel încît $a^a = \overline{bc}$, $a \neq 0$.

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

**VI.A.11.** Cîte numere de șase cifre, scrise în baza 10, există, astfel încît fiecare dintre ele să coincidă cu răsturnatul său ?

*(Etapa județeană, 1987, Sibiu)*

**VI.A.12.** a) Se consideră numerele :

$A = 101 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 100)$,

$B = 8 \cdot 555^2 - 222^2$.

Să se arate că $AB$ este un pătrat perfect.

b) Să se afle numerele $\overline{abc}$ în baza 10, divizibile cu 45, pentru care $\overline{cba} - \overline{abc} = 297$.

*(Etapa județeană, 1987, Brașov)*

**VI.A.13.** Să se determine toate numerele naturale de 4 cifre care, împărțite la numărul $\overline{34x}$ dau cîtul 10 și restul 12, știind că $\overline{34x}$ se divide cu 6.

*(Etapa județeană, 1987, Dolj)*

**VI.A.14.** Determinați cel mai mare număr de două cifre, mai mic decît 30, care se divide la produsul cifrelor.

b) Cercetați dacă există numere de forma $\overline{abc}$ cu $a$, $b$, $c$ consecutive, care să se dividă cu produsul $abc$.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VI.A.15.** Să se arate că toate numerele de forma $72^n + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, se divid cu 1 080.

*(Etapa județeană, 1987, Timiș)*

**VI.A.16.** Arătați că numărul $A = n^4 + n^3 + 2n^2 + 2n$ este divizibil cu 6, $n \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Vîlcea)*

**VI.A.17.** Găsiți un număr natural de forma $\overline{abc}$, știind că este divizibil cu 22, împărțit la 5 dă restul 2, iar cifra sutelor este cu 4 mai mare decît cifra unităților.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VI.A.18.** Să se afle pătratul perfect de patru cifre divizibil cu 44 și care la împărțirea prin 5 dă restul 1, iar la împărțirea cu 7 dă restul 2.

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**VI.A.19.** O bunică are doi nepoți. Vîrsta bunicii se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră fiind vîrsta unuia dintre nepoți. Dacă la vîrsta bunicii se adaugă vîrstele celor doi nepoți se obține 83 ani. Ce vîrstă are bunica ?

*(* * *, etapa republicană, 1986, Rîmnicu-Vîlcea)*

**VI.A.20.** Un număr de trei cifre are suma cifrelor 7. Arătați că dacă numărul se divide cu 7, atunci cifra zecilor este egală cu cifra unităților.

*(* * *, etapa republicană, Bacău, 1987)*

**VI.A.21.** Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ astfel încît suma pătratelor cifrelor date să fie pătratul unui număr prim de forma $3k+2$, $k \in \mathbf{N}$.

*(I. Coroian, etapa republicană, Baia Mare, 1989)*

**VI.A.22.** Fie $a$, $b$, $c$, trei numere naturale nenule, astfel încît $ab < c$. Să se arate că $a+b \leqslant c$.

*(* * *, etapa republicană, Baia Mare, 1989)*

## CAPITOLUL II

## RAPOARTE ŞI PROPORŢII

**VI.A.23.** La finisarea unui bloc, cu apartamente de același fel, lucrează 90 zugravi, reprezentînd 4 echipe. Echipa de la scara A termină lucrarea în 10 zile, cea de la scara B în 12 zile, cea de la scara C în 15 zile, iar cea de la scara D în 20 zile. Cîți muncitori sînt în fiecare echipă ?

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**VI.A.24.** Un biciclist a parcurs în prima zi $40\%$ din drum. A doua zi și-a mărit viteza cu $20\%$ și a ajuns la destinație, mergînd în această zi 5 ore. Cîte ore a mers în prima zi ?

*(Etapa județeană, 1987, Olt)*

**VI.A.25.** Să se determine $x$, $y$, $z$ știind că $x-y = \frac{y+z}{4} = \frac{z}{3}$ și că $x+2z = 24$.

*(Etapa județeană, 1987, Hunedoara)*

**VI.A.26.** Dacă numărul natural $A$ se împarte în părți direct proporționale cu numerele naturale $a$, $b$, $c$, se obțin rezultatele corespunzătoare $x$, $y$ și $z$ (numere naturale), iar dacă se împarte în părți invers proporționale cu aceleași numere, se obțin rezultatele $m$, $p$ și $q$. Să se afle numerele $m$, $p$ și $q$, știind că numerele $a$, $b$ și $c$ sînt numere prime ($a < b < c$), iar produsul $xyz = 139\,755$.

*(Etapa județeană, 1987, Gorj, Maramureș)*

**VI.A.27.** Se consideră trei numere pozitive $x$, $y$, $z$, încît $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$.

a) Cît la sută reprezintă numărul cel mai mic din cel mare ?

b) Să se afle cele trei numere, știind că $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 372$.

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VI.A.28.** Găsiți numerele $a$, $b$ și $c$, știind că $a$ reprezintă $20\%$ din $b$, $b$ și $c$ sînt direct proporționale cu 5 și respectiv 7, iar suma lui $a$ cu $c$ este 24.

*(* * *, etapa municipală, 1987, Municipiul București)*

**VI.A.29.** O sumă de bani s-a distribuit ca primă la trei muncitori direct proporțional cu numerele $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ și $\frac{1}{3}$. Unul din muncitori constată că el primește astfel cu 462 lei mai mult, dacă aceeași sumă s-ar fi distribuit invers proporțional cu numerele 12 ; 10 ; 15 respectiv.

a) Care a fost întreaga sumă ?

b) Cît a primit fiecare muncitor ?

*(Etapa județeană, 1987, Tulcea)*

**VI.A.30.** Fie $\frac{x}{0,\,(1)} = \frac{y}{0,\,(3)}$ și $\frac{y}{0,\,(5)} = \frac{z}{0,\,(7)}$, cu $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.
Să se afle $x$, $y$, $z$, știind că $x + y + z = 123$.

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VI.A.31.** Fiind date două numere $x$ și $y$ astfel încît $\frac{x}{8} = \frac{y}{4}$, să se demonstreze că :

$$\frac{x}{x+y} < \frac{x^2}{x^2+y^2} < \frac{x^3}{x^3+y^3}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița)*

**VI.A.32.** Numerele $a$, $b$, $c$, $a < b < c$, naturale, sînt direct proporționale cu numerele naturale $x$, $y$, $z$. Determinați $a$, $b$, $c$, știind că $x > 1$. $xyz - x^2z = 10$ și $90 < a + b + c < 109$.

*(Etapa județeană, 1987, Teleorman)*

**VI.A.33.** Fie $a, b, c \in \mathbf{N}$. Arătați că:

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{c+a}{a+b} \Leftrightarrow a = b = c.$$

*(Etapa județeană, 1987, Vîlcea)*

**VI.A.34.** Să se afle $x$ din proporția:

$$\frac{x}{3} = \frac{\overline{8x}}{\overline{x1}}$$

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VI.A.35.** Determinați numerele $x, y, z$, știind că: $x + y + z = 45$,

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \text{ și } \frac{y}{6} = \frac{z}{8}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Galați)*

**VI.A.36.** Dintr-o suprafață s-a arat $64\%$. Restul suprafeței a fost repartizat la doi tractoriști în părți invers proporționale cu 0,3 și $\frac{1}{2}$. Primul tractorist a arat cu 18 ha mai mult ca al doilea.

a) Cîte hectare a arat fiecare tractorist și cîte hectare are toată suprafața?

b) Cîte procente din toată suprafața a arat fiecare tractorist?

*(Etapa județeană, 1987, Bihor)*

**VI.A.37.** Să se afle numerele pozitive $x, y, z, t$, știind că ele îndeplinesc, în același timp, următoarele condiții:

1. $y + 2z + 3t = 1$.
2. Dacă înmulțim pe $x$ cu 5 obținem același rezultat ca atunci cînd înmulțim pe 7 cu $y$.
3. $z$ este egal cu $\frac{3}{5}$ din $y$.
4. Raportul dintre $z$ și $t$ este 1,5.

*(Etapa județeană, 1987, Satu Mare)*

**VI.A.38.** Știind că $\frac{a}{b} = 0{,}4$, calculați valoarea expresiei:

$$\frac{9a - 2b}{5a + 6b}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Mureș)*

# CAPITOLUL III

## NUMERE ÎNTREGI. NUMERE RAȚIONALE. EXTRAGEREA RĂDĂCINII PĂTRATE

**VI.A.39.** Calculați :

$a = 5^n + (-5)^n : (-5)^5$, $n \in \mathbf{N}$ ;

$b = (100 - 0^2)(100 - 1^2) \ldots (100 - 15^2)$ ;

$c \equiv 1 \cdot (-1)^{101-1} + 2 \cdot (-1)^{101-2} + 3 \cdot (-1)^{101-3} + \ldots 100 \cdot (-1)^1 + 101 \cdot (-1)^0$.

*(Etapa județeană, 1987, Călărași)*

**VI.A.40.** Să se determine numerele întregi $x$, $y$ și $z$, știind că satisfac simultan condițiile :

a) Sumele $x+y$, $y+z$ și $z+x$ sînt respectiv proporționale cu numerele : $(-2)^2 \cdot (-1)^2$ ; $(-3)^2 \cdot (-1)^3$ și $(-4)^2 \cdot (-1)^0$ ;

b) $x+y+z = (-3)^{24} : (-27)^4 \cdot (-1)^{1986} + (-2)^{3^2} : (-8) \cdot (-1)^{1987} + (-2)^4$.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VI.A.41.** Efectuați :

$$\left(\frac{-5}{6}\right) : \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : \left(0{,}5 + \frac{1}{6}\right)\right].$$

*(Etapa județeană, 1987, Timiș)*

**VI.A.42.** Să se determine cel mai mic număr natural nenul $a$ cu proprietatea că :

$$\frac{(-1)^m + (-1)^n + 1}{a} \in \mathbf{Z}, \text{ oricare ar fi } m, n \in \mathbf{N}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Satu Mare)*

**VI.A.43.** Arătați că numărul $m \equiv \dfrac{2n - 1 + 3 \cdot (-1)^{n-1}}{4} \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Olt)*

**VI.A.44.** Se dă expresia : $F(n) \equiv \dfrac{n}{(-1)^n} + 2 \cdot (-1)^n \cdot n$. Să se calculeze suma $S = F(1) + F(2) + \ldots + F(1987)$.

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VI.A.45.** Să se afle numerele naturale de trei cifre $\overline{xyz}$ cu proprietatea că $\frac{34}{x^2+y^2+z^2}$ este număr natural.

*(C. Hărăbor, etapa republicană, Rîmnicu-Vîlcea, 1986)*

**VI.A.46.** Să se determine cea mai mică fracție în baza 10 de forma $\frac{\overline{1x}}{\overline{6yz}}$, unde $\overline{1x}$ estse număr prim, iar $\overline{6yz}$ este divizibil cu 15.

*(Etapa județeană, 1987, Gorj)*

**VI.A.47.** Să se arate că dacă numerele naturale $\frac{a}{4}$ și $b$ sînt întregi, atunci și numărul $\frac{1}{2}(a+b+b^2)$ este întreg.

*(Etapa județeană, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**VI.A.48.** Să se determine $a$, $b$, $c$, numere întregi, astfel încît $\frac{5}{a}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$.

*(Etapa județeană, 1987, Vrancea)*

**VI.A.49.** Demonstrați că : $\frac{8}{9}+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{9}\cdot 10^n$ este număr natural, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Teleorman)*

**VI.A.50.** a) Să se afle cel mai mare număr natural cu care se poate simplifica fracția $\frac{2a+3}{3a-7}$, $a \in \mathbf{N}$ ;

b) Aflați valoarea lui $a \in \mathbf{Z}$ pentru care $\frac{2a+5}{a+2} \in \mathbf{Z}$.

*(Etapa județeană, 1987, Buzău)*

**VI.A.51.** Dacă $x$ este un număr rațional, să se scrie în ordine crescătoare numerele raționale : $x$, $x^2$, $x^3$. Justificați.

*(Etapa județeană, 1987, Galați)*

**VI.A.52.** Să se găsească valoarea minimă și valoarea maximă a expresiei :

$$E=\frac{(-3)(-1)^{2n}+8(-1)^{n-7}-23(-1)^{4n+3}+10}{2^{2n}\cdot 3^n : 6^n+2(-1)^{2n+1}}, \text{ unde } n \in \mathbf{N}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VI.A.53.** a) Să se determine toate valorile posibile ale fracției :

$$\frac{5(-1)^a-7(-1)^{a+b}+9(-1)^b+1}{5(-1)^b+7(-1)^{a+b}-9(-1)^a+2}, \text{ unde } a,\ b \in \mathbf{N};$$

b) Să se afle valoarea de adevăr a relației $a > b$, unde $a=(27^{31}-2\cdot 9^{46}+4^{102}:2^{203}-3^{92})^{213}$ ; $b=(-3)^{142}$.

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VI.A.54.** Calculați : $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$, $a \in \mathbf{N}^*$, apoi aflați suma :

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

*(Etapa județeană. 1987, Buzău)*

**VI.A.55.** Să se compare numerele :

$$x=\frac{(-1)^{1\cdot 2}}{1\cdot 2}+\frac{(-1)^{2\cdot 3}}{2\cdot 3}+\frac{(-1)^{3\cdot 4}}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{(-1)^{1\,986\cdot 1\,987}}{1\,986\cdot 1\,987} \text{ și } y=\frac{1\,986}{1\,987}.$$

*(Etapa județeană. 1987, Bacău)*

**VI.A.56.** Să se calculeze suma :

$$S=\frac{1}{1\,986\cdot 1\,987}+\frac{1}{1\,987\cdot 1\,988}+\ldots+\frac{1}{1\,999\cdot 2\,000}.$$

*(Etapa județeană. 1987, Constanța)*

**VI.A.57.** Se consideră numerele :

$$a=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)^{200}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{201}+\left(-\frac{1}{9}\right)^{100}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{201}-\left(\frac{1}{2}\right)^{201}\cdot 9^4\right];$$

$b=2^{141}$.

a) Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor : $a=b$ ; $a>b$ ; $a<b$.

b) Să se arate că $a+b+1$ nu poate fi pătrat perfect.

*(Etapa județeană, 1987, Brăila)*

**VI.A.58.** a) Să se determine $n \in \mathbf{N}$ așa încît $3-\frac{30-2n}{6} \in \mathbf{N}$ ;

b) Calculați : $\frac{2}{7}(-1)^{k+1}+\frac{1}{3}(-1)^{k+2}+(-1)^{k+3}$.

*(Etapa județeană, 1987, Tulcea)*

**VI.A.59.** Știind că $\frac{a}{b}=0{,}6$, calculați $x$ din egalitatea :

$$\frac{8\frac{8}{15}\left\{\left[\frac{1}{5}+x\left(1\frac{1}{3}-1{,}2\right)\right]\cdot 1{,}(6)\right\}}{2{,}1(3)\cdot 19}=\frac{2^{31}}{4^{15}}\cdot\frac{7a-3b}{4a+9b}.$$

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**VI.A.60.** Fie $\overline{x,\,(y)}+\overline{y,\,(z)}+\overline{z,\,(x)}=a,(a)$ unde $x$, $y$, $z$, $a$ sînt cifre și $x<y<z$.

a) Să se determine $x$, $y$, $z$ pentru $a=7$.

b) Să se determine $a$, pentru a avea un număr maxim de soluții.

*(Etapa județeană, 1987, Caraș-Severin)*

**VI.A.61.** După un an, o sumă depusă la C.E.C., împreună cu dobînda respectivă, este 1 470 lei. Dacă dobînda ar fi fost cu 1% mai mare, suma ar fi fost 1 484 lei.

Să se afle suma depusă și suma rezultată din dobîndă.

*(Etapa județeană, 1987, Dolj)*

**VI.A.62.** Un spectacol pentru copii nu are loc decît în prezența a cel puțin 50 spectatori. Sala de spectacol nu are mai mult de 100 locuri. O treime din copii sînt fete, din care jumătate din clasa a VI-a, iar $\frac{7}{2}$ din numărul băieților participanți sînt din clasa a VI-a. Cîți băieți și cîte fete din clasa a VI-a au participat la spectacol ?

*(Etapa județeană, 1987, Vrancea)*

**VI.A.63.** a) Aflați diferența a două numere naturale, știind că împărțind pe fiecare la 1987, obținem cîturi numere naturale consecutive și același rest.

b) Ce condiții trebuie să îndeplinească numerele întregi $m$ și $n$ astfel încît $m^k \cdot n^{k+1} > m^{k+1} \cdot n^k$, pentru $k$ număr natural par ? Dar pentru $k$ număr natural impar ?

*(Etapa municipală, 1987, Municipiul București)*

**VI.A.64.** Arătați că, în orice bază de numerație, numărul natural $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - a - b - c$ este par.

*(Etapa județeană, 1987, Caraș-Severin, Ialomița)*

**VI.A.65.** a) Să se demonstreze că dacă $\frac{x}{y} = \frac{11}{7}$, atunci $\frac{5x-3y}{2x+y} = \frac{34}{29}$ și reciproc, dacă $\frac{5x-3y}{2x+y} = \frac{34}{29}$, atunci $\frac{x}{y} = \frac{11}{7}$ ;

b) Pentru ce valori întregi ale lui $x$ expresia $\frac{3x+4}{5x+1}$ este număr întreg ?

*(Etapa județeană, 1987, Suceava)*

**VI.A.66.** Să se arate că numărul :

$$p = \frac{2^{2k+1} \cdot 7^k + (-2)^{2k} \cdot 7^{k+1} + 14^k \cdot 2^{k+3}}{5^2 \cdot (-2)^k \cdot (-7)^k - 2^{k+3} \cdot 7^{5k} : (7^k)^4},$$

este natural pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

Pentru valoarea lui $k$ pentru care $p$ este număr prim, să se calculeze suma :

$$S = [(1\,987 + k)^k - 1]^{1\,986-k} + [(1\,986 + k)^k - 1]^{1\,985-k} + \\ + \ldots + [(2 + k)^k - 1]^{1-k} + [(1 + k)^k - 1]^{-k}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VI.A.67.** Să se afle toate perechile de numere naturale, $(x, y)$, pentru care suma dintre produsul lor și diferența lor este 1 987.

*(I. Diaconu, etapa republicană, Bacău, 1987)*

**VI.A.68.** Să se determine numărul natural care satisface simultan condițiile :

a) dacă îl împărțim la 4, obținem restul 3 ;

b) dacă îl împărțim la 10, obținem restul 1 ;

c) dacă îl împărțim la 12, obținem restul 3 ;

d) suma câturilor celor trei împărțiri de la punctele a), b), c) este mai mare cu 16 decît o treime din numărul dat.

*(* * *, etapa republicană, Brașov, 1988)*

**VI.A.69.** Să se afle cîte numere naturale mai mici decît 1 000 au ultima cifră diferită de zero. Arătați că suma inverselor acestor numere este mai mică de 25.

*(* * *, etapa republicană, Brașov, 1988)*

**VI.A.70.** Să se determine două numere naturale al căror produs este un element al mulțimii $\mathbf{A} \equiv \{-36 ; 144 ; 0\}$ și ale căror rădăcini pătrate sînt direct proporționale cu numerele 2 și 6.

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VI.A.70.** Să se determine toate numerele de forma $\overline{4\,000xyzt}$ care sînt pătrate perfecte.

*(Etapa județeană, 1987, Sălaj)*

**VI.A.72.** Să se determine $a, b, c \in \mathbf{N}$ așa încît $\frac{a}{2} = \frac{b^2}{4} = \frac{c^3}{9}$ și $a \cdot b \cdot c = 5\,184$.

*(Etapa județeană, 1987, Constanța)*

**VI.A.73.** Aflați valoarea raportului $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbf{N}$ sînt soluții ale ecuației : $a^2(a + b) = 63$.

*(Etapa județeană, 1987, Constanța)*

**VI.A.74.** Să se arate că numărul :

$$A = \frac{(12 + 8)^2 + \sqrt{\frac{15}{16}a^2} \cdot \sqrt{\frac{256}{225}} - \sqrt{160\,000}}{2(9 + 4) - \sqrt{625}} + a,$$

nu poate fi pătrat perfect, oricare ar fi $a \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Buzău)*

**VI.A.75.** Să se determine elementele mulțimii :

$$A = \{\overline{abc} \mid \sqrt{\overline{abc} - \sqrt{c}} \in \mathbf{N}\}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Sibiu)*

**VI.A.76.** Media proporțională a numerelor 60 și $x$ este un număr natural mai mic decît 100. Aflați pe $x$, $x \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

## INDICAȚII

**VI.A.1.** Calculați cîte cifre se folosesc pentru numerotarea paginilor 1—9, 10—99, 100—999.

**VI.A.2.** Notați cu $x$ contribuția fiecărei persoane și formați ecuația.

**VI.A.3.** Singurul număr prim par este 2.

**VI.A.4.** Folosiți ultima cifră a puterilor lui 2 din **N**.

**VI.A.5.** Folosiți scrierea zecimală a numărului $\overline{xxx}$.

**VI.A.6.** Folosiți scrierea zecimală.

**VI.A.7.** Alegeți, de exemplu, un număr de două cifre, diferite de 0 și 1 și faceți produsul cifrelor. Ce cifre mai trebuie să adăugăm în fața numărului obținut pentru a obține numere cu proprietatea cerută de enunț ?

**VI.A.8.** Cercetați ultima cifră a numerelor din cei doi membri ai egalității.

**VI.A.9.** a) Procedați prin reducere la absurd. b) Calculați suma primelor 62 de numere naturale.

**VI.A.10.** Țineți seama de faptul că $a$ este cifră, iar numărul $bc$ are două cifre.

**VI.A.11.** Stabiliți forma numerelor căutate.

**VI.A.12.** Folosiți scrierea zecimală.

**VI.A.13.** Folosiți teorema împărțirii cu rest.

**VI.A.14.** Încercați cu $a = 2$.

**VI.A.15.** Folosiți calculul cu puteri.

**VI.A.16.** Grupați convenabil termenii și folosiți factorul comun.

**VI.A.17.** Găsiți mai întîi valoarea lui $c$.

**VI.A.18.** Începeți prin a stabili ce rezultă din faptul că numărul căutat este divizibil cu 4 și 11, apoi determinați ultima cifră a numărului $\overline{abcd} - 1$.

**VI.A.19.** Formați o ecuație de gradul I cu două necunoscute.

**VI.A.20.** Folosiți scrierea zecimală.

**VI.A.21.** Notînd cu $A^2$ suma pătratelor cifrelor, stabiliți modul de scriere a elementelor mulțimii din care face parte $A^2$ ca sumă de trei pătrate.

**VI.A.22.** Ce relații obțineți din $a \geqslant 1$, $b \leqslant 1$ ? Folosiți condiția din enunț.

**VI.A.23.** Formați un șir de rapoarte egale.

**VI.A.24.** Folosiți formula din fizică $S = vt$.

**VI.A.25.** Aplicați proprietatea șirului de rapoarte egale.

**VI.A.26.** Scrieți șirurile de rapoarte egale.

**VI.A.27.** Folosiți regula de trei simplă.

**VI.A.28.** Formulați un șir de rapoarte egale.

**VI.A.29.** Formați șirurile de rapoarte egale și folosiți condițiile problemei.

**VI.A.30.** Formați două proporții.

**VI.A.31.** Folosiți proporții derivate.

**VI.A.32.** Folosiți proprietatea șirului de rapoarte egale.

**VI.A.33.** Aceeași indicație ca la problema precedentă.

**VI.A.34.** Folosiți scrierea zecimală și proprietatea fundamentală a proporțiilor.

**VI.A.35.** Din relațiile date formați o ecuație.

**VI.A.36.** Transpuneți în relații matematice datele problemei.

**VI.A.37.** Folosiți proporțiile derivate și o proprietate a șirului de rapoarte egale.

**VI.A.38.** Folosiți factorul comun.

**VI.A.39.** Pentru calculul lui $a$, analizați pe cazuri, după paritatea lui $n$. Pentru calculul lui $b$, găsiți valoarea unei paranteze care vă va ajuta foarte mult ! Pentru ultimul număr, grupați convenabil termenii după ce ați făcut ridicările la putere.

**VI.A.40.** Efectuați mai întîi calculele și folosiți indicațiile de la problema precedentă.

**VI.A.42.** Analizați pe cazuri, după paritatea numerelor $m$ și $n$.

**VI.A.43.** Analizați pe cazuri, după paritatea lui $n$.

**VI.A.44.** Grupaţi convenabil termenii expresiei.

**VI.A.45.** Numerele căutate vor fi naturale dacă $x^2+y^2+z^2$ este un divizor natural al numărului 34.

**VI.A.46.** Folosiţi criteriile de divizibilitate învăţate, după ce aţi stabilit valoarea lui $x$.

**VI.A.47.** Folosiţi faptul că produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2.

**VI.A.48.** Determinaţi mulţimile din care fac parte numerele $a$, $b$, $c$.

**VI.A.49.** Grupaţi primul cu ultimul termen.

**VI.A.50.** Folosiţi teorema împărţirii cu restul zero.

**VI.A.51.** Analizaţi pe cazuri, după $x$ subunitar sau supraunitar, pozitiv sau negativ.

**VI.A.52.** Analizaţi după paritatea lui $n$.

**VI.A.53.** a) La fel ca la problema precedentă, după paritatea numerelor $a$ şi $b$.

b) Folosiţi calculul cu puteri.

**VI.A.54.** Aduceţi mai întîi, la acelaşi numitor.

**VI.A.55.** Folosiţi în sens invers relaţia obţinută la problema precedentă.

**VI.A.56.** Analog cu problema precedentă.

**VI.A.57.** a) Folosiţi calculul cu puteri. b) Determinaţi ultima cifră a numărului $a+b+1$.

**VI.A.58.** Analizaţi după paritatea lui $k$.

**VI.A.59.** Aduceţi, mai întîi, egalitatea la o formă mai simplă.

**VI.A.60.** Folosiţi scrierea zecimală.

**VI.A.61.** Formaţi două ecuaţii din condiţiile problemei.

**VI.A.62.** Determinaţi fracţiile care reprezintă numărul fetelor şi al băieţilor din clasa a VI-a.

**VI.A.63.** a) Folosiţi teorema împărţirii cu rest. b) Discuţie după paritatea lui $k$ şi după semnul numerelor $m$ şi $n$.

**VI.A.64.** Puneţi în evidenţă baza $x$.

**VI.A.65.** Exprimaţi pe $x$ în funcţie de $y$ în prima relaţie şi apoi înlocuiţi în a doua. Reciproc, aplicaţi proprietatea fundamentală a proporţiilor.

**VI.A.66.** Folosiţi operaţiile cu puteri.

**VI.A.67.** Formaţi o ecuaţie cu două necunoscute şi exprimaţi una din ele în funcţie de cealaltă.

**VI.A.68.** Folosiți teorema împărțirii cu rest și condițiile problemei.

**VI.A.69.** Formați grupe de termeni și arătați că fiecare grupă are o valoare mai mică decît un anumit număr.

**VI.A.70.** Analizați cele trei cazuri.

**VI.A.71.** Stabiliți care este cel mai mic și cel mai mare număr de forma dată.

**VI.A.72.** Stabiliți mai întîi paritatea numerelor $a$, $b$, $c$.

**VI.A.73.** Descompuneți numărul 63 în factori primi și analizați cazurile care apar.

**VI.A.74.** Scrieți numărul $A$ sub formă mai simplă.

**VI.A.75.** Numărul $c$ trebuie să fie pătrat perfect de o singură cifră.

**VI.A.76.** Produsul $60 \cdot x$ trebuie să fie un pătrat perfect mai mic decît $100^2$.

# GEOMETRIE

## CAPITOLUL I

## TRIUNGHIURI

**VI.G.1.** Se dau : un triunghi $ABC$, un punct $D$ și o semidreaptă cu originea în $D$. Să se construiască un triunghi congruent cu triunghiul $ABC$, care să aibă punctul $D$ drept unul din vîrfuri iar una din laturi să se găsească pe semidreapta dată. Dați cît mai multe soluții, folosind diferitele cazuri de congruență.

*(Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 1986)*

**VI.G.2.** Pe latura $OX$ a unghiului $XOY$ ($X$, $O$, $Y$ necoliniare), avem punctele $A$ și $B$, iar pe $OY$ punctele $C$ și $D$. Determinați lungimea segmentului $AB$ astfel încît să fie adevărate simultan afirmațiile : $CB$ este mediană în triunghiul $OAC$ ; $\widehat{OAD} \equiv \widehat{ODA}$ ; $OC = 8$ cm și $DC = 2$ cm.

*(Etapa municipală, București, 1987)*

**VI.G.3.** Dacă $a$ și $b$ sînt două drepte perpendiculare ce se intersectează în punctul $O$, dacă $A$ și $A'$ sînt două puncte ce aparțin lui $a$, diferite între ele și diferite de $O$, astfel încît $OA \equiv OA'$ și dacă $B$ și $B'$ sînt două puncte ce aparțin lui $b$, diferite între ele și diferite de $O$, demonstrați că triunghiurile $ABB'$ și $A'BB'$ sînt congruente.

*(Etapa locală, Maramureș, 1988)*

**VI.G.4.** Pe bisectoarea $AD$ a unui triunghi isoscel $ABC$ ($AB \equiv AC$) se ia un punct oarecare $P$. Dreptele $BP$ și $CP$ intersectează laturile $AC$ și $AB$ în $M$, respectiv $N$. Să se arate că $BN \equiv CM$.

*(Etapa județeană, Galați, 1988)*

**VI.G.5.** Să se arate că în triunghiul $ABC$ latura $AC$, bisectoarea unghiului $B$ și mediatoarea laturii $BC$ sînt concurente într-un punct $F$ dacă și numai dacă $m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{C})$.

*(Etapa județeană, Gorj, 1987)*

**VI.G.6.** Se dă triunghiul isoscel $ABC$ ($AB \equiv AC$) și $AB > BC$. Pe latura $AC$ se consideră punctul $M$ astfel încît $\widehat{BMC} \equiv \widehat{ABC}$. Se duc $MN \perp BM$ ($N \in BC$) și $PC \perp BC$ ($P \in BM$), care se intersectează în $Q$. Să se arate că :

a) $MP \equiv CN$ ;

b) Dreptele $BQ$ și $MC$ sînt perpendiculare.

*(Etapa județeană, Mehedinți, 1988)*

**VI.G.7.** Fie un triunghi isoscel $ABC$ $(AB \equiv AC)$ şi punctele $M \in AB$ şi $N \in AC$, astfel încît $AM \equiv AN$. Să se demonstreze că :

a) triunghiurile $AMC$ şi $ANB$ sînt congruente ;

b) triunghiul $BOC$ este isoscel, unde $\{O\} = MC \cap NB$ ;

c) dacă $\{D\} = AO \cap BC$, atunci $AD \perp BC$.

*(Etapele locală, Sibiu, 1988 ; judeţeană, Bistriţa-Năsăud, 1988)*

**VI.G.8.** Se dă triunghiul isoscel $ABC$ cu $AB \equiv AC$. Pe latura $AB$ se iau punctele $M$, $N$, $P$, astfel încît $AM \equiv MN \equiv NP \equiv PB$ şi pe latura $AC$ punctele $E$, $F$, $G$, astfel încît $AE \equiv EF \equiv FG \equiv GC$.

Fie $PE \cap BC = \{S\}$, $MG \cap BC = \{T\}$ şi $EP \cap MG = \{H\}$. Arătaţi că :

a) $MG \equiv PE$ ;

b) $MT \equiv ES$ ;

c) $AH \perp BC$ ;

d) $\triangle HMP \equiv \triangle DEG$.

*(Etapa judeţeană, Harghita, 1988)*

**VI.G.9.** Se dă triunghiul $ABC$ şi $M$ mijlocul lui $AC$. $D$ este un punct pe semidreapta $BM$, astfel încît $AB \equiv AD$.

În cazul cînd $F$ şi $E$ sînt mijloacele segmentelor $AB$ şi respectiv $AD$, analizaţi dacă $CE + CF = BD$.

*(Etapa judeţeană, Bacău, 1987)*

**VI.G.10.** Se consideră un triunghi $ABC$ cu $m(\widehat{C}) = 60°$. Pe semidreptele $AA'$, $(A' \in BC)$ şi $BB'$, $(B' \in AC)$ perpendiculare pe $BC$, respectiv $AC$ se consideră punctele $M$ şi $N$ astfel încît $AA' \equiv A'M$ şi $BB' \equiv B'N$. Să se demonstreze că punctele $M$, $C$ şi $N$ sînt coliniare.

*(Etapa judeţeană, Giurgiu, 1987)*

**VI.G.11.** Fie triunghiul $ABC$ cu $AB \equiv AC$ şi $E \in AC$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{M\}$. Să se arate că :

1. $M$ aparţine bisectoarei unghiului $A$ dacă şi numai dacă :

a) $MB \equiv MC$ sau

b) $BF \equiv CE$.

2. Punctul $M$ al bisectoarei unghiului $A$ se află şi pe bisectoarele unghiurilor $B$ şi $C$ dacă şi numai dacă $BF + CE = 2 \cdot EF$.

*(Etapa judeţeană, Iaşi, 1987)*

## CAPITOLUL II

## PARALELISM

**VI.G.12.** În triunghiul isoscel $ABC$ $(AB \equiv AC)$, prin mijlocul $D$ al laturii $AC$ se duce o paralelă la dreapta $AB$, care taie latura $BC$ în $E$ şi bisectoarea unghiului $B$ în $F$. Să se arate că :

a) triunghiurile $DEC$ şi $ADE$ sînt isoscele ;

b) $AE \perp BC$ şi $BE \equiv CE \equiv EF$.

*(Etapa judeţeană, Cluj, 1987)*

**VI.G.13.** Fie două drepte paralele $d$ și $d'$ și $s$ o secantă care intersectează dreapta $d$ în $A$ și dreapta $d'$ în $B$. Bisectoarele celor două unghiuri interne aflate de aceeași parte a secantei se întîlnesc în punctul $C$. Din $C$ se construiesc perpendicularele pe $d$, $d'$ și $s$ ale căror picioare sînt respectiv $H$, $K$, $M$.

a) să se arate că triunghiul $ABC$ este dreptunghic ;

b) să se compare lungimile segmentelor $CH$, $CK$, $CM$ ;

c) să se arate că $AB = AH + BK$.

*(Etapa județeană, Arad, 1987)*

**VI.G.14.** În triunghiul $ABC$ bisectoarea unghiului $A$ și mediana dusă din $B$ sînt perpendiculare în $O$. Fie $M$, $N$, $P$ respectiv mijloacele laturilor $AB$, $AC$, $BC$. Să se arate că :

a) $M$, $O$, $P$ sînt coliniare ;

b) $\triangle PON$ este isoscel.

*(Etapa județeană, Ialomița, 1988)*

**VI.G.15.** În exteriorul triunghiului isoscel $ABC$ ($AB \equiv AC$) se construiesc triunghiurile isoscele dreptunghice $ABD$ și $ACE$, $m(\widehat{D}) = m(\widehat{E}) = 90°$.

a) Să se arate că $DE \parallel BC$.

b) Să se arate că vîrful $A$, mijloacele segmentelor $DE$ și $BC$, și punctul $\{M\} = DB \cap CE$ sînt coliniare.

*(Etapa județeană, Bacău, 1987)*

**VI.G.16.** Fie triunghiul isoscel $ABC$, în care $AB \equiv AC$ și $m(\widehat{A}) = 90°$. Perpendiculara în $B$ pe $AB$ întîlnește latura $AC$ în $D$. Pe perpendiculara în $C$ pe $AC$ se ia punctul $E$ astfel încît $BD \equiv CE$ ($B$ și $E$ în semiplane diferite determinate de $AD$). Dacă $F$ este mijlocul segmentului $DE$, să se arate că :

a) $AC$ este bisectoarea unghiului $BAE$ ;

b) $AF \perp DE$ ;

c) punctele $B$, $C$, $F$ sînt coliniare ;

d) care este măsura unghiului $BAC$ astfel încît $BC \parallel AE$.

*(Etapa județeană, Brăila, 1987)*

**VI.G.17.** Se consideră triunghiul $ABC$ ($AB \equiv AC$). Fie mijlocul laturii $BC$ și $I$ piciorul perpendicularei duse din $M$ pe $AC$. Fie $P \in MI$ astfel încît $I$ să fie mijlocul lui $MP$. Dacă $D$ este piciorul înălțimii din $B$ în triunghiul $ABC$, se cere :

a) să se arate că $\widehat{DPM} \equiv \widehat{BAM}$ ;

b) $MD \perp AP$.

*(Etapa județeană, Dolj, 1988)*

**VI.G.18.** Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC$ ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $AB < AC$ şi se ia pe ipotenuza $BC$ punctul $D$ astfel încît $AD = AB$. Perpendiculara din $B$ pe $AD$ taie dreapta $AD$ în $E$ şi cateta $AC$ în $F$. Să se arate că :

a) $\triangle BFC$ este isoscel ;

b) punctul $C$ este egal depărtat de $AD$ şi de paralela la $AB$ dusă prin $D$.

*(Etapa judeţeană, Dîmboviţa, 1988)*

**VI.G.19.** Bisectoarele unghiurilor $B$ şi $C$ ale triunghiului oarecare $ABC$ taie linia mijlocie a triunghiului paralelă cu $BC$ în $M$ şi $N$. Să se demonstreze că : $AB + AC = BC + 2 \cdot MN$.

*(Etapa judeţeană, Harghita, 1987)*

**VI.G.20.** Fie punctele $M$, $N$, $P$ mijloacele laturilor triunghiului $ABC$ ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$). Prelungim segmentul $NP$ cu segmentul $PE \equiv NP$, iar segmentul $CM$ îl prelungim cu $MD \equiv CM$.

a) Demonstraţi că punctele $E$, $A$ şi $D$ sînt coliniare.

b) Calculaţi lungimile laturilor triunghiului $ABC$, ştiind că $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{3}$ şi $\frac{BC}{6} = \frac{AC}{8}$, iar perimetrul triunghiului este 45.

*(Etapa judeţeană, Argeş, 1987)*

**VI.G.21.** Fie $ABC$ un triunghi, $M$, $N$, $P$ respectiv mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CA$. Considerăm punctele $D$ şi $E$ astfel încît $M$ şi $P$ să fie, respectiv, mijloacele segmentelor $CD$ şi $NE$.

a) Demonstraţi că $AE = \frac{1}{2} \cdot BC$ şi $DA \parallel BC$.

b) Arătaţi că punctele $D$, $A$, $E$ sînt coliniare.

c) Calculaţi măsura segmentului $DE$ dacă lungimile laturilor triunghiului $ABC$, $AB$, $BC$, $CA$ sînt respectiv invers proporţionale cu numerele 6, 5, 7 şi semiperimetrul triunghiului este 10,7 cm.

*(Etapa judeţeană, Bistriţa-Năsăud, 1987 şi Galaţi, 1987)*

**VI.G.22.** Fie $OAB$ un triunghi isoscel cu $OA \equiv OB$. Se prelungeşte $OB$ cu un segment $OC \equiv OB$. Prin $C$ se duce paralela la $AB$ care intersectează dreapta $OA$ într-un punct $D$. Perpendiculara pe $AB$ într-un punct oarecare $M$ al segmentului $AB$ intersectează pe $BC$ în punctul $N$ şi pe $AD$ în punctul $P$.

Arătaţi că :

a) $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ ;

b) $MN + MP =$ constant, adică nu depinde de alegerea lui $M$ pe $AB$.

*(* * *, etapa republicană, Vîlcea, 1986)*

**VI.G.23.** Fie $XOY$ un unghi ascuțit și $A$ un punct pe semidreapta $OY$, $A \neq O$. Se ia $B \in OX$, astfel încît dreapta $AB$ să fie perpendiculară pe semidreapta $OX$. Notăm cu $C$ și $D$ intersecțiile bisectoarelor unghiurilor $OAB$ și $BAY$ cu $OX$.

Să se demonstreze că :

a) Triunghiul $CAD$ este dreptunghic.

b) Există două puncte pe semidreapta $OY$ fiecare egal depărtat de $A$ și de semidreapta $OX$.

*(Laurențiu N. Gaiu, etapa republicană, Brașov, 1988)*

## CAPITOLUL III

## SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

**VI.G.24.** Unghiul $BAC$ al triunghiului $ABC$ are 120°, iar $AD$ ($D \in BC$) este bisectoarea lui. Fie $AE$ și $AF$ ($E, F \in BC$) bisectoarele unghiurilor $BAD$ și, respectiv $DAC$. Dacă $\widehat{AED} = 60°$, să se arate că :

a) triunghiul $AEF$ este echilateral ;

b) $ED = DF = \frac{AE}{2}$ ;

c) triunghiurile $AFC$, $BEA$ și $ABC$ sînt isoscele.

*(Etapa județeană, Mureș, 1988)*

**VI.G.25.** Fie un $\triangle ABC$, unde măsura unghiului $B$ este media aritmetică a celorlalte două. Se duc bisectoarele $AM$ și $CN$, $AM \cap CN = \{Q\}$. Să se demonstreze că :

a) $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{NQM}) = 180°$.

b) Dacă $CN \equiv CA$, să se calculeze $m(\widehat{A})$.

c) Dacă $QP \perp AB$, $QT \perp BC$, $T \in BC$ și $P \in AB$ precizați natura $\triangle BPT$.

*(Etapa județeană, Alba, 1988)*

**VI.G.26.** Fie triunghiul $ABC$ scalen, în care $m(\widehat{B}) \equiv \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})}{2}$. Înălțimea $AE$ intersectează bisectoarea unghiului $B$ în $M$. Să se demonstreze că $3BM = 2AE$.

*(Etapa județeană, Iași, 1988)*

**VI.G.27.** În triunghiul $ABC$ cu unghiul $A < 90°$, se ia pe latura $BC$ punctul $M$ între $B$ și $C$.

Ducem $MO \perp AC$ ($O \in AC$) și îl prelungim cu $ON \equiv OM$.

Ducem $MQ \perp AB$ ($Q \in AB$) și îl prelungim cu $QP \equiv QM$.

a) Să se demonstreze că triunghiul $ANP$ este isoscel.

b) Exprimați unghiurile triunghiului $ANP$ cu ajutorul unghiului $A$ al triunghiului $ABC$.

c) Cîte grade trebuie să aibă unghiul $A$, pentru ca triunghiul $PAN$ să fie echilateral ?

*(Etapa locală, Sălaj, 1988)*

**VI.G.28.** Fie triunghiul $ABC$ isoscel, $AB \equiv AC$, în care $m(\widehat{BAC}) = 36°$. Se prelungește $BC$ dincolo de $C$ cu segmentul $CE \equiv AC$.

a) Este $AC$ bisectoare în triunghiul $BAE$ ?

b) În triunghiurile $ABC$ și $ACE$ avem trei congruențe : $AB \equiv AC$ ; $AB \equiv EC$ și $\widehat{BAC} \equiv \widehat{AEB}$. Sînt aceste triunghiuri congruente ?

*(Etapa județeană, Ialomița, 1988)*

**VI.G.29.** În triunghiul $ABC$ avem : $m(\widehat{A}) = 35°$ și $m(\widehat{B}) = 65°$. Fie $D$ situat pe $AB$ astfel încît $\widehat{BCD} \equiv \widehat{DCA}$ și fie $DE$ distanța de la punctul $D$ la latura $AC$. Se consideră punctele $M$ și $N$ pe dreapta $CD$ astfel încît $MD \equiv DN \equiv DE$ cu $M$ între $C$ și $D$, iar $D$ între $M$ și $N$. Să se determine măsura unghiului $CME$ și măsura unghiului $CNE$.

*(Etapa județeană, Galați, 1988)*

**VI.G.30.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, cu măsura unghiului $A$ de $90°$ și a unghiului $C$ de $15°$, se duc din $A$ înălțimea $AD$, bisectoarea $AE$ și mediana $AO$ ($D$, $E$, $O$ se află pe $BC$).

Să se arate că $ED = \frac{OE}{2}$.

*(Etapa județeană, Brașov, 1987)*

**VI.G.31.** Fie triunghiul $ABC$ isoscel ($AB \equiv AC$) ; se prelungește $BC$ dincolo de $C$ cu segmentul $CE = AC$.

a) Determinați măsura unghiului $BAC$ astfel încît $AC$ să fie bisectoare în triunghiul $ABE$.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției : $\triangle ABC \equiv \triangle ACE$.

*(Etapa județeană, Brașov, 1987)*

**VI.G.32.** În interiorul unui triunghi isoscel $ABC$, $AB \equiv AC$, se consideră un punct $M$ unde $m(\widehat{MBC}) = 30°$, $m(\widehat{MCB}) \equiv 15°$. Notăm cu $P$ intersecția dreptei $BM$ cu înălțimea din $A$ a triunghiului $ABC$. Să se afle măsurile unghiurilor $BPC$ și $PMC$.

*(Etapa județeană, Brașov, 1988)*

**VI.G.33.** În triunghiul dreptunghic $ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{C}) = 30°$, se duce mediana $AD$. Din $D$ se duc perpendiculare pe $BC$ și $AD$ ce se întîlnesc cu $AC$ în $E$ și respectiv în $F$.

Să se arate că $AE \equiv EF \equiv FC$.

*(Etapa județeană, Gorj, 1988)*

**VI.G.34.** Fie triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$. Se ia pe semidreapta $CA$ segmentul $AD \equiv AB$. $A$ între $C$ și $D$ și pe semidreapta $AB$ segmentul $BE = AC - AB$, $B$ între $A$ și $E$. Să se demonstreze că $BD \perp CE$ și $CB \perp DE$.

*(Etapa județeană, Alba, 1987)*

**VI.G.35.** În triunghiul $ABC$ ducem bisectoarea $AD$ a unghiului $BAC$ ($D \in BC$) și notăm cu $E$ și $F$ intersecțiile perpendicularei pe $BC$ în $D$ cu $AB$ și respectiv $AC$. Știind că $BD \equiv DF$, $DC \equiv DE$, $AD \equiv AE$, se cere:

a) Să se arate că $BF \perp EC$.

b) Să se afle unghiurile triunghiului $ABC$.

*(Etapa județeană, Brăila, 1987)*

**VI.G.36.** În triunghiul $ABC$ se duc înălțimea $AA'$ și bisectoarea interioară $BB'$, care se intersectează în $D$ ($A' \in BC$ și $B' \in AC$).

Se dau: $m(\widehat{BAA'}) = 40°$; $m(\widehat{AB'B}) = 65°$; $m(\widehat{B}) < 90°$; $m(\widehat{C}) < 90°$.

a) Să se arate că $\triangle ADB'$ este isoscel.

b) Să se calculeze $m(\widehat{AMC})$ și $m(\widehat{A'AM})$, unde $M$ este mijlocul lui $BC$.

*(Etapa județeană, Mehedinți, 1988)*

**VI.G.37.** În triunghiul $ABC$ unghiurile $A$, $B$ și $C$ sînt direct proporționale respectiv cu 6,5; 5 și 0,5 iar mediatoarea laturii $AC$ taie latura $BC$ în $E$. Să se determine raportul între lungimea înălțimei $AD$ și lungimea segmentului $BE$.

*(Etapa județeană, Constanța, 1988)*

**VI.G.38.** Fie un triunghi $ABC$ cu unghiurile $A$, $B$, $C$ respectiv proporționale cu numerele 4, 2, 3. Bisectoarea unghiului $A$ intersectează latura $BC$ în $D$ și aceasta se prelungește cu $DE \equiv AD$.

a) Să se afle măsurile unghiurilor $A$, $B$, $C$.

b) Arătați că triunghiul $BDE$ este isoscel.

c) Arătați că bisectoarea unghiului $ADC$ este perpendiculară pe $BE$.

*(Etapa județeană, Sălaj, 1988)*

**VI.G.39.** Unghiurile $A$, $B$ și $C$ ale unui triunghi $ABC$ au măsurile invers proporționale respectiv cu numerele $0,(3)$; $\frac{1}{7}$ și $0,125$. Fie $M$ și $N$ puncte situate pe $AB$, respectiv pe $AC$, astfel încît $m(\widehat{ACM}) \equiv 40°$ și $m(\widehat{ABN}) \equiv 20°$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$ și măsura unghiului $ANM$.

*(Etapa județeană, Brăila, 1988)*

**VI.G.40.** Fie $D$ un punct situat pe baza $BC$ a triunghiului isoscel $ABC$ și $E \in AC$, astfel încît $m(\widehat{BAD}) = 2 \cdot m(\widehat{EDC})$. Să se arate că triunghiul $ADE$ este isoscel.

*(Etapa județeană, Brașov, 1988)*

**VI.G.41.** Într-un triunghi $ABC$, notăm cu $D$ piciorul bisectoarei unghiului $A$ și notăm cu $E$ mijlocul laturii $AC$.

Știind că $m(\widehat{A}) = 2m(\widehat{B})$, $DE \parallel AB$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.

*(Etapa locală, Bacău, 1987)*

**VI.G.42.** În triunghiul $ABC$ avem că $m(\widehat{B}) = 3m(\widehat{A})$. Mediatoarea laturii $BC$ intersectează dreapta $AC$ în punctul $E$. Dacă $AB \equiv BE$, să se calculeze unghiurile triunghiului $ABC$.

*(Selectare lot, București, 1987 și etapa județeană, Gorj, 1988)*

**VI.G.43.** Se consideră triunghiul oarecare $ABC$. Pe dreapta $BC$ se iau punctele $D$ și $E$ astfel încît $BD \equiv AB$ și $CE \equiv AC$. Să se afle $m(\widehat{DAE})$.

*(Etapa județeană, Caraș-Severin, 1987)*

**VI.G.44.** Se dă triunghiul $ABC$ oarecare. Din $B$ se duce perpendiculara $BD$ pe latura $AC$ și se prelungește dincolo de $B$, cu segmentul $BB' \equiv AC$. Din $C$ se duce perpendiculara $CE$ pe latura $AB$ și se prelungește dincolo de $C$ cu segmentul $CC' \equiv AB$; demonstrați că $AB'$ și $AC'$ sînt congruente și perpendiculare.

*(Etapa județeană, Bihor, 1987)*

**VI.G.45.** Se consideră punctele $E$ și $D$ pe latura $AC$ a triunghiului isoscel $ABC$, $(AB \equiv AC)$, astfel încît $AD \equiv BD$ și $BE \equiv BC$. Dacă $m(\widehat{BAC}) = 50°$:

a) Să se calculeze unghiurile triunghiului $EBD$.

b) Să se demonstreze că distanța de la punctul $C$ la dreapta $BD$ este egală cu distanța de la punctul $E$ la dreapta $AB$.

c) Fie $B'$ piciorul bisectoarei unghiului $ABC$ $(B' \in AC)$. Demonstrați că punctul $B'$ este egal depărtat de dreptele $BE$ și $BD$.

*(Etapa județeană, Constanța, 1987)*

**VI.G.46.** Se știe că mediatoarele unui triunghi sînt concurente. Fiind date trei drepte concurente, există, sau nu, un triunghi avînd cele trei drepte ca mediatoare ?

*(* * *, etapa republicană, Baia Mare, 1989)*

## CAPITOLUL IV

## SIMETRIA

**VI.G.47.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic $(m(\widehat{A}) = 90°)$.

a) Dacă $m(\widehat{ABC}) = 60°$ și pe bisectoarea lui se consideră un punct $E$ ale cărui simetrice în raport cu laturile $AB$ și $BC$ sînt $F$ și respectiv $G$, să se găsească măsura unghiului $FBG$.

b) Cîte grade trebuie să măsoare unghiul $ABC$ astfel încît dreptele $FB$ și $GB$ să fie perpendiculare ?

*(Etapa județeană, Bistrița-Năsăud, 1987)*

**VI.G.48.** Măsurile unghiurilor $BAC$, $ABC$ și $ACB$ ale triunghiului $ABC$ sînt invers proporționale, respectiv cu numerele : $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$ și 0, (1). Bisectoarea $AA'$ a unghiului $BAC$ ($A' \in BC$) intersectează segmentul $BE$, simetricul lui $AB$ față de înălțimea $BD$ ($E \in AC$) în punctul $F$.

Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului $FA'CE$.

*(Etapa județeană, Buzău, 1987)*

**VI.G.49.** Pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ se ia punctul $E$ între $B$ și $C$, și fie simetricele $M$ și $N$ ale lui $E$ față de $AC$, respectiv față de $AB$. Să se arate că $M$, $A$, $N$ sînt coliniare dacă și numai dacă triunghiul $ABC$ este dreptunghic.

*(Etapa locală, Covasna, 1988)*

## CAPITOLUL V

## PATRULATERE

**VI.G.50.** Fie :

$A$ = mulțimea tuturor triunghiurilor isoscele.

$B$ = mulțimea tuturor triunghiurilor cu două mediane congruente.

$C$ = mulțimea tuturor triunghiurilor echilaterale.

a) Arătați că $A = B$.

b) Stabiliți o condiție referitoare la unghiul format de medianele congruente ale oricărui element al mulțimii $B$ pentru ca $B = C$.

c) În $\triangle MNP$ ($MP \equiv MN$), suma măsurilor unghiurilor alăturate laturii $MP$ plus suma măsurilor unghiurilor alăturate laturii $NP$ este de 250°. Să se arate că $\triangle MNP \in A - C$.

*(Etapa județeană, Bacău, 1987)*

**VI.G.51.** Două triunghiuri $ABC$ și $ADE$ au mediana $AM$ comună ($\{M\} \equiv BC \cap DE$).

Fie $P$, $Q$, $R$, $S$ respectiv mijloacele laturilor $AB$, $AC$, $AD$, $AE$.

a) Cercetați dacă patrulaterul $PSQR$ este paralelogram.

b) În ipoteza suplimentară, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DAE}) = 90°$, cercetați dacă patrulaterul $DBEC$ este dreptunghi.

*(Etapa județeană, Prahova, 1987)*

**VI.G.52.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic ($m(\widehat{A}) = 90°$) și $E$ un punct pe înălțimea $AD$. Perpendiculara în $E$ pe $CE$ intersectează dreapta $AB$ în $F$. Paralela prin $E$ la $AB$ intersectează pe $BC$ în $G$. Să se arate că $AGEF$ este paralelogram.

*(Etapa județeană, Dolj, 1987)*

**VI.G.53.** Fie $A'$ un punct oarecare pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ și fie $I$ mijlocul segmentului $AA'$. Dreapta $BI$ intersectează pe $AC$ în $M$, iar dreapta $CI$ intersectează pe $AB$ în $N$. Paralela dusă din $A'$ la $AC$ intersectează pe $BM$ în $P$, iar paralela dusă din $A'$ la $AB$ intersectează pe $CN$ în $Q$. Să se demonstreze că $MNPQ$ este paralelogram.

*(* * *, etapa republicană, Bacău, 1987)*

## INDICAȚII

**VI.G.1** Notăm de exemplu $DX$ semidreapta cu originea în $D$ și $DB'C'$ triunghiul congruent cu $\triangle ABC$ și care urmează să fie construit. Construim $B' \in DX$ astfel încît $DB' \equiv AB$. În acest fel, două din vîrfurile $\triangle DB'C'$ sînt construite (care ?). Urmează construcția celui de-al treilea vîrf, conform cu unul din cazurile de construcție ale triunghiurilor oarecare (trei cazuri).

**VI.G.2.** Să fixăm două din cele patru puncte $A$, $B$, $C$, $D$ și anume punctele $C$ și $D$ (de ce ?). În continuare fixăm punctul $A$ ținînd cont că $\triangle OAD$ este isoscel (de ce ?). Urmează ilustrarea grafică a punctului $B$.

**VI.G.3.** Din textul problemei rezultă că punctele $A$ și $A'$ sînt în semiplane opuse determinate de dreapta $b$. Punctele $B$ și $B'$ pot fi în același semiplan sau în semiplane opuse determinate de dreapta $a$. Apoi vom urmări triunghiuri congruente, ținînd cont, de exemplu, că : $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB}) = 90°$ (ipoteză).

**VI.G.4.** Punctul $P$ poate fi interior sau exterior $\triangle ABC$. Urmăriți congruențe de triunghiuri. Astfel : dacă punctul $P$ este interior sau exterior $\triangle ABC$, triunghiurile congruente să conțină latura comună $AP$ și apoi altă pereche de triunghi să conțină unghiuri opuse la vîrf.

**VI.G.5.** Directa : Dacă în $\triangle ABC$, latura $AC$, bisectoarea unghiului $B$ și mediatoarea laturii $BC$ sînt concurente în același punct $F$, atunci $m(\widehat{B}) = 2 \cdot m(\widehat{C})$.

Reciproca : Dacă în $\triangle ABC$, $m(\widehat{B}) = 2 \cdot m(\widehat{C})$, atunci latura $AC$, bisectoarea unghiului $B$ și mediatoarea laturii $BC$ sînt concurente în același punct $F$.

Observație : Directa poate fi considerată reciprocă și invers.

**VI.G.6.**

a) Să observăm că $\triangle ABC$ este ascuțitunghic, apoi că $BM \equiv BC$ (de ce ?). În continuare, ținînd cont de ipotezele $QM \perp BM$ și $QC \perp BC$, observați că $MQ \equiv CQ$. Urmăriți apoi două triunghiuri dreptunghice care conțin unghiuri opuse la vîrf.

b) De exemplu, comparați triunghiurile $BMQ$ și $BCQ$.

**VI.G.7.** Presupuneți $M$ și $N$ între $A$ și $B$ și respectiv $A$ și $C$ sau pe prelungirile laturilor $AB$ și $AC$.

a) Gîndiți $BM = AB - AM$, apoi congruențe de triunghiuri.

b) Congruența unghiurilor $CBO$ și $BCO$ rezultă din precedenta.

c) Proprietăți ale triunghiurilor isoscele.

**VI.G.8.**

a) Punctele $M$, $N$, $P$ determină pe $AB$ patru segmente congruente. Exprimați $AM$, $AP$, $AE$, $AG$ în funcție — de exemplu — de $AB$, apoi căutați triunghiuri congruente.

b) Demonstrați, de exemplu, că $\triangle GCT \equiv \triangle PBS$ și apoi folosiți anumite rezultate de la punctul a).

c) Arătați că $AH$ este bisectoarea unghiului $MAE$.

d) Rezultă imediat din punctul c).

**VI.G.9.** Ipotezele problemei oferă aplicarea (corectă) a proprietății comune tuturor triunghiurilor isoscele în care medianele relative laturilor congruente sînt congruente.

**VI.G.10.** În $\triangle ABC$, $AA'$, $BB'$ sînt înălțimi (ipoteză) și deoarece $AA' \equiv A'M$, $BB' \equiv B'N$, urmează că triunghiurile $MCA$ și respectiv $BCN$ sînt isoscele (de ce ?). Cum $m(\widehat{BCA}) = 60°$, urmează că unghiul $MCN$ este alungit și deci...

**VI.G.11.**

1. Directa : În triunghiul isoscel $ABC$ cu $AB \equiv AC$ și $E \in AC$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{M\}$, punctul $M$ aparține bisectoarei unghiului $A$ dacă :

a) $MB \equiv MC$ sau

b) $BF \equiv CE$. Metoda triunghiurilor congruente.

Reciproca : În triunghiul isoscel $ABC$, cu $AB \equiv AC$ și $E \in AC$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{M\}$ dacă punctul $M$ aparține bisectoarei unghiului $A$, atunci :

a) $MB \equiv MC$ sau

b) $BF \equiv CE$. Metoda triunghiurilor congruente.

2. Directa : În triunghiul isoscel $ABC$ cu $AB \equiv AC$ și $E \in AC$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{M\}$, punctul $M$, care aparține bisectoarei unghiului $A$, aparține și bisectoarei unghiului $B$, dacă $BF + CE = 2 \cdot EF$. Drepte paralele intersectate de o secantă și metoda triunghiurilor congruente.

Reciproca : În triunghiul isoscel $ABC$ cu $AB \equiv AC$ și $E \in AC$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{M\}$, dacă punctul $M$, care aparține bisectoarei unghiului $A$, aparține și bisectoarei unghiului $B$, atunci $BF + CE = 2 \cdot EF$.

Observație : Directa și reciproca pot lua locul una celeilalte.

**VI.G.12.**

a) Deoarece $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$ (ipoteză echivalentă) și $DE \parallel AB$ (ipoteză), urmează că $\triangle DEC$ are două unghiuri congruente.

Deoarece $DE \equiv DC$ (demonstrat la punctul precedent) și $DC \equiv DA$ (ipoteză), rezultă că...

b) Ţinînd cont că triunghiurile $ADE$ şi $EDC$ sînt isoscele (anterior demonstrat), scrieţi suma unghiurilor în $\triangle AEC$, apoi folosiţi proprietăţile dreptelor paralele intersectate de secanta $BF$ (care este şi bisectoarea unghiului $ABC$ — ipoteză).

**VI.G.13.**

a) Faţă de paralelele $d$, $d'$, unghiurile interne şi de aceeaşi parte a secantei $AB$ sînt suplementare, şi cum $AC$ şi $BC$ sînt bisectoarele unghiurilor $HAB$ şi $KBA$, urmează că...

b) Demonstraţi că orice punct care aparţine bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului.

c) Rezultă din b) stabilind congruenţe de triunghiuri convenabil alese.

**VI.G.14.**

a) Cercetaţi dacă, în $\triangle BAN$, ipotezele problemei permit aplicarea proprietăţilor triunghiurilor isoscele, apoi cercetaţi ce reprezintă $MO$ în $\triangle BAN$ şi $OP$ în $\triangle BNC$.

b) Linia mijlocie într-un triunghi.

**VI.G.15.**

a) Notaţi, de exemplu, $F$ şi $G$ intersecţiile dintre dreapta $DE$ şi dreptele $AB$, respectiv $AC$. Arătaţi că $\triangle AFG$ este isoscel, apoi proprietăţi ale dreptelor paralele intersectate de o secantă.

b) Deoarece $FR \equiv RG$, unde $R$ este mijlocul lui $FG$, rezultă că în $\triangle AFG$ (isoscel comf. a)) $AR$ este...

Analog, în $\triangle ABC$ (isoscel — ipoteză), $AS$ este..., unde $S$ este mijlocul lui $BC$. În continuare, repetăm raţionamentele precedente astfel : stabiliţi ce reprezintă $MR$ în triunghiul isoscel $DME$ (de ce este isoscel ?) şi ce reprezintă $MS$ în triunghiul isoscel $BMC$ (de ce este isoscel ?). În acest mod, punctele $A$, $R$, $S$, $M$ aparţin unei aceleiaşi drepte $AM$, care este bisectoarea unghiului $BAC$.

**VI.G.16.**

a) Observaţi că $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (construcţie).

b) Din congruenţa precedentă rezultă şi $AD \equiv AE$, apoi proprietăţi ale triunghiurilor isoscele.

c) Demonstraţi că $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ACB}$ şi apoi că $\widehat{DCF} \equiv \widehat{ACB}$.

d) În ipoteza $BC \parallel AE$, $\triangle ABC$ devine echilateral.

**VI.G.17.** În $ABC$, $BM \equiv MC$ (ipoteză), rezultă că $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAM}$ (de ce ?).

a) Observaţi că $AC$ este mediatoarea segmentului $MP$ iar în $\triangle BDC$, $MD$ este mediana relativă ipotenuzei $BC$. În continuare, unghiuri cu laturile perpendiculare (reciprocă).

b) O dată rezolvat a), cercetaţi ce reprezintă dreptele $AC$, $PD$ şi $MD$ în $\triangle MAP$.

**VI.G.18.**

a) Ţinînd cont de ipotezele problemei, evaluaţi în $\triangle BED$ măsura unghiului $EBD$ şi apoi comparaţi unghiurile $EBD$ şi $FCB$.

b) Fie $P$ punctul de intersecţie dintre dreapta $AC$ şi paralela dusă prin $D$ la $AB$ (ipoteză). Evaluaţi măsura unghiului $DFC$. Fie $R$ intersecţia dreptei $AD$ cu dreapta perpendiculară pe $AD$ şi care trece prin $C$. Calculaţi măsura unghiului $RDC$.

**VI.G.19.** Fie $I$ punctul de intersecţie al bisectoarelor $BB'$ şi $CC'$ ($B' \in AC$ şi $C' \in AB$) din $\triangle ABC$. Se ştie că bisectoarea $AA'$ ($A' \in BC$) trece tot prin punctul $I$. Oricare ar fi $\triangle ABC$, în $\triangle AA'C$ unghiul $AA'C$ fiind exterior $\triangle AA'B$ este mai mare decît $\hat{B}$ sau $\widehat{BAA'}$ care este congruent cu $\widehat{A'AC}$ (ipoteza $AA'$ bisectoarea unghiului $A$). În aceste condiţii, în $\triangle AA'C$, $m(\widehat{AA'C}) > m(\widehat{A'AC})$ şi deci, conform unei teoreme cunoscute, $AC > A'C$ (1). Se demonstrează că în $\triangle AA'C$, punctul $I$ (intersecţia bisectoarelor triunghiului $ABC$) împarte latura $AA'$ într-un raport $\frac{AI}{IA'} = \frac{AC}{A'C}$. Conform (1), $\frac{AC}{A'C} > 1$, şi deci $AI > IA'$ (2). Se demonstrează că oricare ar fi $B \in BC$, segmentul $AP$ este intersectat de linia mijlocie $EF$ ($E \in AB$ şi $F \in AC$) într-un punct care este mijlocul lui $AP$. Astfel, $EF$ va conţine şi mijlocul bisectoarei $AA'$ (3). Din (2) şi (3) deducem că în $\triangle BIC$, $EF$ intersectează prelungirile laturilor $BI$ şi $CI$ şi astfel $M$ aparţine semiplanului determinat de $AA'$ şi $C$ (interior sau exterior triunghiului $ABC$), iar punctul $N$ aparţine semiplanului determinat de $AA'$ şi punctul $B$ (interior sau exterior triunghiului $ABC$). Conform acestor precizări, consideraţi două cazuri :

a) Punctele $M$ şi $N$ interioare $\triangle ABC$ şi în semiplanele opuse determinate de $AA'$ şi atunci ordinea punctelor va fi $E - N - M - F$ ($E \in AB$ şi $F \in AC$, iar $EF$ linie mijlocie).

b) Punctele $M$ şi $N$ exterioare $\triangle ABC$ şi în semiplanele opuse determinate de $AA'$, şi atunci ordinea punctelor va fi $N - E - F - M$ ($EF$ — ca mai sus).

Pentru rezolvare, folosiţi cunoştinţe relativ la drepte paralele intersectate de o secantă şi triunghiul isoscel, apoi exprimaţi măsurile unor segmente ca sume sau diferenţe de segmente, convenabil alese.

**VI.G.20.**

a) Cu notaţiile propuse de textul problemei, arătaţi — de exemplu — că dreptele $AE$ şi $AD$ sînt paralele cu dreapta $BC$, de unde rezultă, evident, $D$, $A$, $E$ coliniare.

b) Folosiţi proporţii derivate cu termeni schimbaţi.

**VI.G.21.**

a) Patrulaterul $BNEA$ este paralelogram (de ce ?) şi $MP$ este linie mijlocie în $\triangle CDA$.

b) Dreptele $AD$ şi $AE$ sînt paralele cu dreapta $BC$, deci...

c) Se scrie că $AB$, $BC$, $CA$ respectiv sînt direct proporţionale cu $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$.

**VI.G.22.**

a) Metoda triunghiurilor congruente. Cercetați unghiurile adiacente laturilor $OB$ și $OC$.

b) Stabiliți un triunghi isoscel și apoi un triunghi congruent cu triunghiul $NMB$.

**VI.G.23.**

a) Unghiurile $OAB$ și $BAY$ sînt adiacente și cu o latură în prelungire etc....

Sau : în $\triangle OAB$, $AC$ este bisectoarea interioară (ipoteză), iar $AD$ este bisectoarea exterioară triunghiului $OAB$, deci...

b) Fiind vorba despre „depărtarea" unui punct, $E \in OY$ de semidreapta $OX$, vom construi o perpendiculară din $E$ pe $OX$. Fie $M$ piciorul acestei perpendiculare ($M \in OX$) și deci $EM$ este depărtarea de la $E$ la $OX$.

Deoarece $EM \equiv EA$ (ipoteză), urmează că $\triangle EAM$ este isoscel. Notînd cu $N$ intersecția dreptei $EM$ cu dreapta $AC$, triunghiul $EAN$ este isoscel (de ce ?), $EA \equiv EN$ și prin urmare...

**VI.G.24.**

a) În $\triangle ADE$, conform ipotezelor date, făcînd suma unghiurilor, rezultă că $AD \perp BC$. Cercetați apoi măsurile unghiurilor $\triangle ADF$.

b) Teorema unghiului de 30°, dintr-un triunghi dreptunghic.

c) Evaluați — de exemplu — măsura unghiului $ACD$ din $\triangle ADC$.

**VI.G.25.**

Deoarece $m(\widehat{B}) = \dfrac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2}$, deducem $m(\widehat{B}) = 60°$.

a) Evaluați $m(\widehat{AQC})$ din $\triangle AQC$.

b) Exprimați $m\left(\dfrac{\widehat{C}}{2}\right)$ în funcție de $m\left(\dfrac{\widehat{A}}{2}\right)$ și apoi în triunghiul isoscel $AQP$ (ipoteză) scrieți suma unghiurilor triunghiului.

c) Proprietatea tuturor punctelor care aparțin bisectoarei unui unghi este de a fi egal depărtate de laturile unghiului, deci...

**VI.G.26.** Calculați, folosind ipoteza, măsura unghiului $B$, și apoi măsura jumătății sale. În continuare se utilizează proprietăți ale triunghiului dreptunghic cu un unghi de 30° și proprietăți în triunghiul isoscel.

**VI.G.27.**

a) În triunghiurile $MAN$ și $MAP$ aplicați proprietăți ale triunghiurilor isoscele sau observați că $AC$ și $AB$ sînt mediatoarele segmentelor $MN$, respectiv $MP$.

b) Notați $m(\widehat{BAM}) = x^0$ și $m(\widehat{MAO}) = y^0$, apoi, conform cu rezultatele de la a).

c) Cu notațiile precedente, scrieți că $m(\widehat{PAN}) = 60°$.

Observație : Rezultatele nu se modifică dacă de exemplu $m(\widehat{B}) = 90°$ sau $m(\widehat{B}) > 90°$, acesta neintervenind în calculul măsurii unghiului $A$.

**VI.G.28.**

a) În triunghiul $ABC$ se calculează, de exemplu, măsura unghiului $ABC$ care este unghi exterior triunghiului isoscel $ACE$ (ipoteză).

b) Dacă cele două triunghiuri au „suficiente" elemente respectiv congruente, ele sînt congruente, altfel nu.

**VI.G.29.** Să observăm că dreapta $CD$ este bisectoare unghiului $ACB$, apoi remarcați că relația $MD \equiv DN \equiv DE$ descrie un triunghi particular.

**VI.G.30.** Țineți cont că într-un triunghi dreptunghic mediana relativă ipotenuzei este jumătate din ipotenuză, apoi observați că bisectoarea $AE$, a unghiului $CAB$ este și bisectoarea unghiului $OAD$ (punctul $E$ este între $O$ și $D$).

**VI.G.31.**

a) Notăm — pentru simplificarea calculului $m(\widehat{BAC}) = x^0$, deci și $m(\widehat{CAE}) = x^0$ (ipoteză), dar și $m(\widehat{CEA}) = x^0$ (de ce ?) — apoi suma unghiurilor unui triunghi.

**VI.G.32.** Punctul $P$ fiind interior $\triangle ABC$, semidreptele $BM$ și $CM$ vor fi interioare unghiurilor $ABC$ și $ACB$. În aceste condiții $m(\widehat{ABC}) > 30°$. Cercetați cărui semiplan determinat de înălțimea $AD$ ($D \in BC$), aparține punctul $M$. Apoi, unghi exterior unui triunghi.

**VI.G.33.** Demonstrați că $\triangle DEF$ este echilateral și apoi aplicați convenabil în triunghiuri dreptunghice teorema relativă unghiului de 30°.

**VI.G.34.** Să facem precizarea : $AC > AB$, unde $AB$, $AC$ sînt măsurile segmentelor $AB$ și $AC$ (de ce ?).

Notați intersecțiile dreptelor $CB$ și $DB$ cu dreptele $DE$ și respectiv $CE$ cu punctele $I$ și respectiv $F$.

Cercetați triunghiul dreptunghic $CAE$ și comparați triunghiurile dreptunghice $CAB$ și $EAD$.

**VI.G.35.**

a) Observați că $m(\widehat{FBD}) = 45°$ (ipoteză), dar și $m(\widehat{DCE}) = 45°$ (ipoteză) și cum latura $BD$ a unghiului $FBD$ este perpendiculară pe latura $ED$ a unghiului $DEC$ (ipoteză), urmează și...

Altfel : suma unghiurilor în $\triangle BCM$, unde $M$ este intersecția dreptelor $BF$ și $EC$.

b) Punctul a) odată rezolvat, urmează că în $\triangle BEC$, $F$ este tocmai... și atunci $m(\widehat{CAB}) = ...$

Suma unghiurilor în $\triangle AFD$. Notați pentru simplificarea calculului $m(\widehat{AED}) = x^0$.

**VI.G.36.**

a) Rezolvați o problemă pregătitoare. Fie $ABC$ un triunghi. Să se calculeze în funcție de unghiurile $\triangle ABC$, unghiul format de o bisectoare interioară și o înălțime a triunghiului, știind că ele nu pleacă din același vîrf al triunghiului $ABC$.

b) Observați că $AM \equiv MC \equiv MB$ (de ce ?).

**VI.G.37.** Scriind $\frac{m(\widehat{A})}{6,5} = \frac{m(\widehat{B})}{5} = \frac{m(\widehat{C})}{0,5}$ și folosind suma unghiurilor unui triunghi, se obține $m(\widehat{C}) = 7°30'$, iar $m(\widehat{A}) = 90° + 7°30'$. Deci, mediatoarea laturii $AC$ intersectează $BC$ într-un punct $E$ situat între $B$ și $C$, iar triunghiul $EAB$ este...

Rezolvați problema : într-un $\triangle$ isoscel cu unghiul necongruent (vîrf) egal cu 30°, distanța de la mijlocul laturii necongruente (bazei) la latura congruentă este de patru ori mai mică decît lungimea laturii necongruente.

**VI.G.38.**

a) Conform ipotezei, scriind că măsurile unghiurilor sînt respectiv direct proporționale cu 4, 2, 3 se obține $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 40°$.

b) Condițiile din ipoteză determină un $\triangle$ cu două unghiuri congruente.

c) Bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt...

**VI.G.39.** Scriem că măsurile unghiurilor $A$, $B$, $C$ sînt respectiv direct proporționale cu inversele numerelor $0,(3)$ ; $\frac{1}{7}$ ; $0,125$.

Să notăm $\{P\} = BN \cap CM$. Cercetați măsura unghiului format de dreptele $CM$ și $BN$, apoi stabiliți natura $\triangle BCN$.

**VI.G.40.** Pentru a simplifica calculele, notați $m(\widehat{EDC}) = x^0$ și deci $m(\widehat{BAD}) = 2x^0$ (ipoteză).

Calculați $m(\widehat{ADC})$ ca unghi exterior triunghiului $BAD$, apoi $m(\widehat{AEC})$ ca unghi exterior triunghiului $DEC$.

**VI.G.41.** Primele două ipoteze ne dezvăluie existența unui triunghi isoscel (care ?).

Paralelismul din ipoteză determină încă un triunghi isoscel (care ?). În continuare, unghi exterior unui triunghi și suma unghiurilor unui triunghi.

**VI.G.42.** În ipoteza $m(\widehat{B}) = 3 \cdot m(\widehat{A})$, cercetați următoarele situații :

a) $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) < 90°$ ; b) $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 90°$ și c) $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) > 90°$, în care caz este posibil : 1) $m(\widehat{B}) = 90°$ sau 2) $m(\widehat{B}) > 90°$.

**VI.G.43.** Oricare ar fi măsura unghiului $BAC$, cercetați cazurile :

a) $E$ și $D$ interioare segmentului $BC$ ; $E$ și $D$ exterioare segmentului $BC$ ; c) De exemplu $E$ interior și $D$ exterior segmentului $BC$ (sau invers).

**VI.G.44.** Considerați : a) $\triangle ABC$ ascuțitunghic ; b) $\triangle ABC$ obtuzunghic în $A$, apoi unghi exterior unui triunghi și „metoda triunghiurilor congruente".

**VI.G.45.**

a) Calculați măsurile unghiurilor $ABC$ și $ACD$, și apoi construiți triunghiurile isoscele $ADB$ și $CBE$.

b) Observați triunghiuri dreptunghice congruente cu ipotenuzele $BE$ și $BC$.

c) Observați triunghiuri dreptunghice congruente cu ipotenuza comună $BB'$.

**VI.G.46.** Prima soluție :

Desenați — spre exemplu — un triunghi ascuțitunghic $ABC$, și apoi figurați mediatoarele triunghiului $MO$, $NO$ și $PO$ ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$). În cazul triunghiului $ABC$, punctul $O$ va fi interior triunghiului. (El este exterior sau aparține unei laturi cînd triunghiul este obtuzunghic, respectiv dreptunghic). Observați că $OM$, $ON$ sau $OP$ sînt respectiv bisectoarele unghiurilor $AOB$, $BOC$ sau $COA$. Notați $m(\widehat{AOM}) = x^0$, $m(\widehat{BON}) = y^0$ și $m(\widehat{COP}) = z^0$ și $m(\widehat{MOP}) = a^0$, $m(\widehat{MON}) = b^0$ și $m(\widehat{NOP}) = c^0$. Atunci, dacă $a^0$, $b^0$, $c^0$ sînt „cunoscute", rezultă că și $x^0$, $y^0$, $z^0$ sînt cunoscute. De ce ?

Altă soluție :

Triunghiul $MNP$ este triunghiul median și mediatoarele triunghiului $ABC$, $MO$, $NO$ și respectiv $PO$ sînt înălțimile triunghiului median $MNP$ etc....

**VI.G.47.** Segmentul determinat de două puncte, gîndite ca fiind simetrice față de o axă de simetrie, are drept mediatoare chiar axa de simetrie. Folosiți implicațiile ce decurg din această proprietate a axei de simetrie.

**VI.G.48.** Scriind că unghiurile $A$, $B$, $C$ ale $\triangle ABC$ sînt respectiv direct proporționale cu numerele 13, 14 și 9, se obțin măsurile unghiurilor $A$, $B$ și $C$. Din ipoteză, $BE$ fiind simetrica lui $BD$ față de înălțimea $AD$, rezultă că $\triangle ABE$ este isoscel. Folosind și restul ipotezelor, precum și suma unghiurilor unui triunghi, se calculează măsurile unghiurilor patrulaterului $A'FEC$.

**VI.G.49.** Cercetați dacă triunghiul $ABC$ poate fi dreptunghic în $B$ sau $C$, apoi aplicați proprietatea comună tuturor punctelor care aparțin mediatoarei unui segment.

Propoziția directă. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic și $E$ un punct care aparține laturii $BC$ ($E$ între $B$ și $C$). Notînd $M$ și $N$ simetricele punctului $E$ față de $AC$ și respectiv $AB$, atunci punctele $M$, $A$, $N$ sînt coliniare.

Care este reciproca ?

**VI.G.50.**

a) Orice triunghi isoscel are proprietatea de a avea medianele relative laturilor congruente, congruente. Proprietatea este și reciprocă, adică, orice triunghi care are două mediane congruente este isoscel, din care motiv proprietatea este „caracteristică" tuturor triunghiurilor isoscele.

b) În orice triunghi echilateral medianele sînt și bisectoare.

c) Conform ipotezelor c) rezultă că $\triangle MNP$ nu este triunghi echilateral.

Consultați „Aritmetica și teoria numerelor", vol. I, cap. I, de Eugen Rusu.

**VI.G.51.**

a) Proprietăți caracteristice ale paralelogramului, apoi linia mijlocie într-un triunghi.

b) Triunghiurile dreptunghice au ipotenuzele congruente (de ce ?) și deci...

**VI.G.52.** Observați că în $CAG$, $AD \perp BC$ (construcție), $GE \perp AC$ (de ce ?) și deci punctul $E$ este ortocentrul $\triangle CAG$. Cum $CE \perp FE$ (construcție), urmează că dreptele $FE$ și $AG$ sînt...

**VI.G.53.** Drepte paralele intersectate de o secantă, apoi metoda triunghiurilor congruente și proprietatea caracteristică a paralelogramului : „punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale". Trei drepte care trec prin $A$, $B$ și respectiv vîrful $C$ și sînt concurente în același punct se numesc „ceviene".

# CLASA A VII-A

# SUBIECTELE DATE LA ETAPA REPUBLICANĂ *

**BUCUREȘTI, 1980**

1 : VII.A.83 ; 2 : VII.A.24 ; 3 : VII.G.38 ; 4 : VII.G.72

**PITEȘTI, 1983**

1 : VII.A.17 ; 2 : VII.A.4 ; 3 : VII.G.30 ; 4 : VII.G.94

**DEVA, 1984**

1 : VII.A.7 ; 2 : VII.A.21 ; 3 : VII.G.33 ; 4 : VII.G.47

**TULCEA, 1985**

1 : VII.A.50 ; 2 : VII.A.11 ; 3 : VII.G.7

**RÎMNICU-VÎLCEA, 1986**

**Algebră**

1 : VII.A.63 ; 2 : VII.A.53 ; 3 : VII.A.72 ; 4 : VII.A.10

**Geometrie**

1 : VII.G.35 ; 2 : VII.G.60 ; 3 : VII.G.51 ; 4 : VII.G.13

**BACĂU, 1987**

**Algebră**

1 : VII.A.58 ; 2 : VII.A.62 ; 3 : VII.A.6 ; 4 : VII.A.43

**Geometrie**

1 : VII.G.26 ; 2 : VII.G.50 ; 3 : VII.G.27 ; 4 : VII.G.93

**BRAȘOV, 1988**

**Algebră**

1 : VII.A.71 ; 2 : VII.A.80 ; 3 : VII.A.13 ; 4 : VII.A.66

**Geometrie**

1 : VII.G.91 ; 2 : VII.G.1 ; 3 : VII.G.76 ; 4 : VII.G.89

**BAIA MARE, 1989**

**Algebră**

1 : VII.A.84 ; 2 : VII.A.81 ; 3 : VII.A.82 ; 4 : VII.A.67

**Geometrie**

1 : VII.G.12 ; 2 : VII.G.95 ; 3 : VII.G.11 ; 4 : VII.G.14

---

* Se indică numai numărul de ordine al problemei al cărui text se găsește la ENUNȚURI.

# ALGEBRĂ

## CAPITOLUL I

## NUMERE ÎNTREGI, RAȚIONALE ȘI IRAȚIONALE

**VII.A.1.** Determinați numerele naturale $a$, $b$, $c$, astfel încît :

$$3^a \cdot 3^b + 16 \cdot 3^c = 1\,323, \quad a < b < c.$$

*(Etapa județeană, 1987, Caraș-Severin)*

**VII.A.2.** Suma cifrelor numărului natural $x$ este $y$, iar suma cifrelor numărului $y$ este $z$. Știind că $x + y + z = 60$, să se determine numărul $x$.

*(Etapa județeană, 1987, Dolj)*

**VII.A.3.** Demonstrați că numărul $A = 3^{2n+2} \cdot 4^{2n+3} - 2^{2n+1} \cdot 6^{2n+3}$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VII.A.4.** Să se arate că nu pot exista numere întregi, $a$, $b$, $c$ astfel încît :

$$abc - a = 1\,983, \quad abc - b = 20, \quad abc - c = 4.$$

*(* * *, etapa republicană, 1983, Pitești)*

**VII.A.5.** Demonstrați că $p^2 - 1$, unde $p$ este prim și mai mare ca 3, se devide cu 24.

*(Etapa județeană, 1987, Vrancea)*

**VII.A.6.** Fie $m$ și $n$ numere naturale care se pot scrie ca sume de două pătrate de numere naturale. Să se arate că produsul $m \cdot n$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate a două numere naturale.

*(* * *, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VII.A.7.** Determinați cel mai mic număr natural nenul $n$ astfel încît $\frac{n}{2}$ să fie pătrat perfect și $\frac{n}{3}$ să fie cub perfect.

*(* * *, etapa republicană, 1984, Deva)*

**VII.A.8.** Să se cerceteze dacă există $n$ număr natural pentru care numărul $p \equiv 2 + 2 \cdot 3^n + 9^n$ este pătrat perfect.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VII.A.9.** Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem :

$$\frac{3^{n+1} \cdot 2^{2n+2} + 7 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} + 5 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n}{5 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^{2n+2} - 49 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} + 2^{2n+1} \cdot 3^{n+2}} = 1.$$

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VII.A.10.** Aflați toate numerele raționale $x$, diferite de zero, astfel încît $x + \frac{1}{x}$ să fie număr întreg.

Verificați că, în acest caz, $x^n + \frac{1}{x^n}$ este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

*(* * *, etapa republicană, 1986, Rîmnicu Vîlcea)*

**VII.A.11.** Fie expresia $E(x) \equiv x^2 + x + p$, unde $p$ este un număr întreg. Să se arate că dacă $E(2)$ sau $E(3)$ sînt numere divizibile cu 6, atunci $E(5)$ este divizibil cu 6.

*(* * *, etapa republicană, 1985, Tulcea)*

**VII.A.12.** Se consideră numărul $n = \sqrt{4a\sqrt{a}} + \sqrt{a} + a$. Știind că $n$ este natural și $a$ este natural, să se arate că forma generală a lui $n$ este un multiplu de 4.

*(Etapa județeană, 1987, Constanța)*

**VII.A.13.** Determinați cel puțin trei numere raționale $x$ care nu sînt întregi, pentru care numărul $\sqrt{x - x^2}$ este rațional și arătați că există oricît de multe numere raționale $x$ pentru care $\sqrt{x - x^2}$ este rațional.

*(Liviu Pîrșan, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.A.14.** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției :

$$p : „\sqrt{7} + \sqrt{13} + \sqrt{117} + \sqrt{26} = \sqrt{63} + \sqrt{208}".$$

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VII.A.15.** a) Calculați :

$$2 + 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} - (\sqrt{72} + \sqrt{32}) : \sqrt{8}.$$

b) Aflați $x \in \mathbf{R}$ din proporția :

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + 2x} = \frac{\sqrt{a} - 2x}{\sqrt{b}}, \quad a \geqslant b > 0.$$

*(Etapa județeană, 1987, Mureș)*

**VII.A.16.** Să se afle valoarea de adevăr a propoziţiilor :

1. $\frac{(-1)^{1+2}}{1+\sqrt{2}}+\frac{(-1)^{2+3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{(-1)^{3+4}}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+$
$+\ldots+\frac{(-1)^{1986+1987}}{\sqrt{1\,986}+\sqrt{1\,987}}+\sqrt{1\,987}\in\mathbf{Q}.$
2. $\sqrt{5k+2}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ pentru orice $k\in\mathbf{N}$.

*(Etapa judeţeană, 1987, Bacău)*

**VII.A.17.** Să se arate că $(\sqrt{2}-3)^2=11-6\sqrt{2}$ şi să se determine numerele întregi $x$ astfel încît $x^2\leqslant 11-6\sqrt{2}$.

*(Olimpia Popescu, etapa republicană, 1983, Piteşti)*

**VII.A.18.** Să se arate că numărul $\frac{2a-b}{a+2b}$ este raţional, unde :

$$a=\sqrt{3-\sqrt{5}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\text{ şi }b=\sqrt{\sqrt{7}-1-\sqrt{11-4\sqrt{7}}}.$$

*(Etapa judeţeană, 1987, Brăila)*

**VII.A.19.** a) Fie $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x\in\mathbf{R}^*$. Să se arate că $f(a)$ este număr raţional, unde :

$$a=\sqrt{4+\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}.$$

b) Să se determine mulţimea : $A=\{n\in\mathbf{N}\mid\sqrt{10-\sqrt{n}}\in\mathbf{N}\}$.

*(Etapa judeţeană, 1987, Vrancea)*

**VII.A.20.** Să se precizeze dacă numărul :

$A=\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-\sqrt{6}$, este pozitiv, negativ sau nul.

*(Etapa judeţeană, 1987, Sălaj)*

**VII.A.21.** Fie :

$$p\equiv(3+\sqrt{3+\sqrt{3}})^2\cdot(3-\sqrt{3+\sqrt{3}})^2.$$

Să se determine mulţimea :

$$A=\{x\mid x\in\mathbf{Z},\ x^2<p\}.$$

*(* * *, etapa republicană, 1984, Deva)*

**VII.A.22.** Există $k \in \mathbf{N}$ astfel încît $\sqrt{k^3 + 4k} \in \mathbf{Q}$?

*(Test pentru elevii din județul Călărași, 1987)*

**VII.A.23.** Să se compare numerele:

$$A \equiv \sqrt{1\,985} + \sqrt{1\,988} \text{ și } B \equiv \sqrt{1\,986} + \sqrt{1\,987}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Suceava)*

**VII.A.24.** a) Să se scrie toate elementele mulțimii divizorilor naturali ai numărului 120.

b) Cîți divizori are un număr de forma $p^3qr$, unde $p$, $q$ și $r$ sînt numere prime două cîte două. Argumentați răspunsul.

*(* * *, etapa republicană, 1980, București)*

## CAPITOLUL II

## FUNCȚII

**VII.A.25.** Fie funcția:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) \equiv \begin{cases} ax + 2 & \text{dacă } x < 0 \\ (b - a)x - b & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases} \quad a,\ b \in \mathbf{R}.$$

a) Să se determine $a$ și $b$, astfel încît reprezentarea grafică a funcției să conțină punctele $A(-4\ ;\ -2)$ și $B(2\ ;\ 0)$.

b) Să se reprezinte grafic funcția dată pentru $a$ și $b$ determinați la punctul a).

c) Arătați că intersecțiile graficului cu axele sînt vîrfurile unui triunghi isoscel.

*(Etapa județeană, 1987, Maramureș)*

**VII.A.26.** Fie funcția $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}$,

$$f_m(x) \equiv \begin{cases} x(m - 2) + 3 & \text{dacă } x < 4\ ; \\ -(12 + 4m)x + 5m - 11 & \text{dacă } x \geqslant 4. \end{cases}$$

a) Să se determine $m$ astfel încît $f_m$ să fie descrescătoare.

b) Să se afle coordonatele punctului de intersecție al graficului lui $f_7$ cu graficul funcției $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) \equiv 3x - 15$.

*(Etapa județeană, 1987, Brăila)*

**VII.A.27.** Să se reprezinte grafic funcția :

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ pentru } x \leqslant -1 \\ -5 \text{ pentru } x \in (-1, 2) \\ -7 \text{ pentru } x \geqslant 2 \end{cases}$$

și să se rezolve ecuația $f(x) + f(-x) = -10$.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**VII.A.28.** Se dau funcțiile : $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f_m(x) = \sqrt{m^2x^2 - 2mx + 1} + \sqrt{x^2 - 2mx + m^2},\ m \in \mathbf{R}.$$

a) Să se determine $m$, astfel încît reprezentările grafice ale funcțiilor să intersecteze axa $Ox$.

b) Fie $M$ punctul de intersecție al reprezentărilor grafice ale funcțiilor $f_1$ și $f_{-1}$, $N$ punctul de intersecție al lui $f_1$ cu axa $Ox$ și $P$ punctul de intersecție al lui $f_{-1}$ cu axa $Ox$. Fie $A$ de abscisă $a > 1$ pe graficul lui $f_1$ și $B$ de abscisă $b < -1$ pe graficul lui $f_{-1}$.

Să se arate că dacă $A$, $B$, $M$ sînt coliniare, atunci $AN \cdot PB = 5$.

*(Etapa județeană, 1987, Teleorman)*

**VII.A.29.** Demonstrați că nu există nici o funcție care să verifice relația :

$$f(x) + f(1 - x) = x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Olt)*

**VII.A.30.** Se dă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relația : $f(3x + a) = 3f(a) + 3x - 2$, $a \in \mathbf{R}$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $a$, astfel încît $f(2a) = 2$.

b) Să se determine $f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VII.A.31.** Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Să se arate că dacă $f(\sqrt{m \cdot n}) \leqslant f\left(\frac{m+n}{2}\right)$ implică $m = n$, oricare ar fi $m, n \in \mathbf{R}$, atunci $f$ este strict descrescătoare.

*(Etapa județeană, 1987, Călărași)*

# CAPITOLUL III

## CALCUL ALGEBRIC. APLICAȚII ALE CALCULULUI ALGEBRIC

**VII.A.32.** Să se afle rădăcina pătrată a produsului :

$$P(x) = [x(x-4)-21]\cdot[x(x-2)-15]\cdot[x(x-12)-35]\ ;\ x \in \mathbf{R}.$$

*(Etapa județeană, 1988, Cluj)*

**VII.A.33.** a) Demonstrați identitatea : $x^9+1=(x+1)(x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Fie $P(x)=x^9-9x^8+9x^7-9x^6-9x^4+9x^3-9x^2+9x-9$. Calculați $P(8)$.

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VII.A.34.** Fie polinomul $P(X)=X^4+1\,987X^2+1\,986X-1\,987$.

a) Să se descompună în factori polinomul $P(X)$.

b) Să se arate că $P(x)>0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

*(Etapa județeană, 1987, Dimbovița)*

**VI.A.35.** a) Să se simplifice fracția :

$$F(X)=\frac{2(X-3)^2+(2X-5)(2X+5)-21X^2+30X+10}{9X^2+1-6X-4}.$$

b) Determinați numărul natural $x$, astfel încît $625^{25}=25^{10x}$.

*(Etapa județeană, 1987, Brașov)*

**VII.A.36.** Se dă fracția :

$$F(a,\ b)=\frac{a^2+b^2+2ab+1-2a-2b}{a^2-1+2ab+b^2}.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se calculeze valoarea numerică a fracției $F(a,\ b)$, pentru $a,\ b \in \mathbf{N}$, știind că media aritmetică a lui $a$ și $b$ este 5.

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VII.A.37.** Fie fracția $F(X)=\dfrac{X^2+3X+2}{X^2+4X+3}$.

a) Să se determine $x \in \mathbf{Z}-\{-1,\ -3\}$ pentru care $F(x)$ este ireductibilă.

b) Să se determine $x \in \mathbf{Z}-\{-1,\ -3\}$ pentru care $F(x) \in \mathbf{Z}$.

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VII.A.38.** Fie fracția : $F(X) = \dfrac{X^{15} + X^9 + X^7 - X^2 - X - 1}{X^9 + X^8 + X^7 - X^2 - X - 1}$.

a) Simplificați fracția $F(X)$.

b) Calculați $F(a)$, atunci cînd : $\dfrac{a^2 + a + 1}{a^8} = 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Hunedoara)*

**VII.A.39.** Descompuneți în factori :

a) $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

b) $x^5 + x + 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Timiș)*

**VII.A.40.** Cercetați dacă numărul $2 \cdot P(1987) + 2 \cdot P(1\,986)$ este pătratul unui număr natural, unde $P(X) = X^2 - 7X + 12$.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**VII.A.41.** Să se arate că numărul $N = \underbrace{111\ldots11}_{(n+1) \text{ de } 1} \cdot \underbrace{111\ldots11}_{(n-1) \text{ de } 1} + 10^{n-1} + 1$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**VII.A.42.** Fie polinomul $P(X) = 3X^2 + d$, $d \in \mathbf{R}$.

Să se arate că oricare ar fi numerele întregi $a$, $b$, $c$, numărul $[P(a) - P(b)] \cdot [P(b) - P(c)] \cdot [P(c) - P(a)]$ este divizibil cu 108.

*(Etapa județeană, 1987, Galați)*

**VII.A.43.** Să se arate că pentru orice $x$ întreg și orice $a$, $b \in \mathbf{Z}$, impare, numărul $M = a^2x + 3a^2 - b^2x - 3b^2$ se divide cu 8.

*(C. Hărăbor, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VII.A.44.** Numerele $a, b, x, y \in \mathbf{R}$ satisfac relațiile : $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 1$ și $2ax + 2by + 1 = 0$.

Calculați :

$(3a - x)^2 + (3b - y)^2$ ; $(4x + 3a)^2 + (4y + 3b)^2$ ; $(a - 2b\sqrt{3})^2 + (b + 2a\sqrt{3})^2$ și $\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}a}{2}\right)^2$.

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

**VII.A.45.** Să se arate că dacă :

$$4x^2 + y^2 - 4(\sqrt{3}x - \sqrt{2}y) + 11 \leqslant 0,$$

atunci

$$\left(\frac{1-3\sqrt{2}}{2x} - \frac{1+2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}y}\right) \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \geqslant 1.$$

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VII.A.46.** Să se calculeze raportul $\frac{x}{y}$ știind că : $(x+y)(2x-y) = 0$ și

$$0 \leq x \leq y.$$

*(Etapa județeană, 1988, Brăila)*

**VII.A.47.** Știind că $a + \frac{1}{a} \geqslant -5$, să se calculeze :

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \text{ și } a^4 + \frac{1}{a^4} :$$

*(Etapa județeană, 1987, Satu Mare)*

**VII.A.48.** Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor $a$ și $b$ reale pozitive, știind că : $a^2 + b^2 = 3\,492$ ; $[a, b] = 216$ și $(a, b) = 6$.

*(Etapa județeană, 1987, Arad)*

**VII.A.49.** Știind că $x^2y^2 + z^2t^2 = 3$ și $(xy + zt)^4 - (xy - zt)^4 \geqslant 48$, aflați $xyzt$.

*(Etapa județeană, 1987, Tulcea)*

**VII.A.50.** Fie $a, b, c, x, y, t$ numerele reale $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ astfel încît : $x \geqslant bc + \frac{1}{a}$; $y = ac + \frac{1}{b}$; $z \geqslant ab + \frac{1}{c}$ și $ax + by + cz = 1$. să se deducă o relație numai între $x, y, z$ și o relație numai între $a, b, c$.

*(O. Stănășilă, etapa republicană, 1985, Tulcea)*

**VII.A.51.** Este adevărată relația $(b^2 + c^2 - a^2)^2 \leq 4b^2c^2$ unde $a, b, c$ sînt laturile unui triunghi ?

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**VII.A.52.** Dacă $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $n \in \mathbf{N}$, sînt numere întregi care nu se divid cu 3, atunci numărul $a_1^{2n} + a_2^{2n} + \ldots + a_n^{2n} - n$ este divizibil cu 3 ?

*(Etapa județeană, 1987, Dolj)*

**VII.A.53.** Fie $a, b, c, m \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$. Demonstrați că dacă $a + 2b + 3c \geqslant 7m$ atunci $(a - m)^2 + (b - 2m)^2 + (3 - 3m)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

*(* * *, etapa republicană, 1986, Rîmnicu Vîlcea)*

# CAPITOLUL IV

## IDENTITĂȚI, INEGALITĂȚI

**VII.A.54.** Dacă $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încît $a > 1$, $b > 1$ atunci

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VII.A.55.** Demonstrați că oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$ strict pozitive avem :

a) $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 6.$

b) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geqslant 6.$

*(Etapa județeană, 1987, Galați și Prahova)*

**VII.A.56.** Să se demonstreze că dacă $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{50} \in \mathbf{R}_+^*$, atunci :

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{50}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{50}} \geqslant 100.$$

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VII.A.57.** Fie $x, y$ numere reale pozitive. Dacă $x+y=2$ atunci $x^2+y^2 \geqslant 2$ și $x^4+y^4 \geqslant 2$.

*(Etapa județeană, 1987, Sibiu)*

**VII.A.58.** Fie expresia $E(x)=x^2-\frac{2}{m}x+\frac{m+1}{m}$. Să se arate că $E(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și orice $m > 1$.

*(I. Cheșcă, A. Olaru, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VII.A.59.** Stabiliți natura triunghiului $ABC$, știind că lungimile laturilor verifică relația :

$$\sqrt{a^2-6a+25}+\sqrt{b^2-8b+25}+\sqrt{c^2-10c+34}=10.$$

*(Etapa județeană, 1987, Argeș)*

**VII.A.60.** a) Să se arate că dacă $x \in [-9, 7]$ atunci :

$$\sqrt{9+x}-\sqrt{7-x} \in [-4\,;\,4].$$

b) Să se demonstreze că dacă $x \in [-4, 2]$ și $y \in [-1, 3]$ atunci :

$$f(x, y)=\sqrt{9+x+y}-\sqrt{14-x-y} \in [2-\sqrt{19}, \sqrt{14}-3].$$

*(Etapa județeană, 1987, Suceava)*

**VII.A.61.** Arătați că în $\mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea :

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc.$$

*(Etapa județeană, 1987, Vîlcea)*

**VII.A.62.** a) Să se arate că pentru orice $x$ și $y$ numerele reale pozitive are loc inegalitatea $x+y \geqslant 2\sqrt{x\cdot y}$.

b) Fie $a$, $b$, $c$, $d$ numere reale pozitive cu $abcd = 1$. Arătați că are loc inegalitatea :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+da+ac+bd \geqslant 10.$$

*(* * *, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VII.A.63.** Fie numerele reale $x$, $y$, $z$. Să se arate că :

a) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ ;

b) în ipoteza că $x+y+z=1$, să se demonstreze că $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

*(* * *, etapa republicană, 1986, Rîmnicu-Vîlcea)*

**VII.A.64.** Dacă $z=\frac{xy}{x+y}$, $x, y \in \mathbf{Q}$, atunci $x^2+y^2+z^2$ este pătratul unui număr rațional ?

*(Etapa județeană, 1987, Gorj)*

**VII.A.65.** Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît $a+b+c=0$ atunci:

a) $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab \geqslant 0$.

b) $(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \leqslant 0$.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VII.A.66.** Se presupune că $x$, $y$, $z$ și $t$ sînt numere reale astfel încît

$$x+y+z=\frac{t+1}{3},\quad xy+yz+zx=\frac{t^2+4t+48}{36},\quad t<0.$$

a) Să se arate că $x^2+y^2+z^2 \geqslant 3$.

b) Pentru ce valori ale lui $x$, $y$, $z$, $t$ avem $x^2+y^2+t^2=3$ ?

*(O. Stănășilă, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.A.67.** Fie $D \equiv \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

a) Să se arate că dacă $(x, y) \in D$ și $x + y = 1$, atunci

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

b) Să se figureze grafic mulțimea punctelor $(x, y) \in D$ astfel încît $[x]^2 + [y]^2 \leq 9$ (aici $[x]$ înseamnă partea întreagă a lui $x$).

*(O Stănășilă, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

## CAPITOLUL V

## CALCUL DE SUME

**VII.A.68.** Să se calculeze suma : $S \equiv 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n$, unde $n$ este număr natural.

b) Calculați numărul termenilor sumei în cazul în care această sumă este 1 987.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VII.A.69.** Aflați $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît :

$$\frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n} = \frac{169}{170}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Vîlcea)*

**VII.A.70.** Fie polinoamele :

$$P(X) = X^7 - 7X^6 + 7X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 7X - 7;$$

$$Q(X) \equiv X^7 - 7X^6 - 7X^5 - 7X^4 - 7X^3 - 7X^2 - 7X - 7.$$

Calculați : a) $P(-2) - Q(2)$ ; b) $P(6) + Q(8)$.

*(Etapa județeană, 1987, Timiș)*

**VII.A.71.** Fie polinomul

$$P(X) \equiv X^2 + (X + 2)^2 + (X + 4)^2 + \ldots + (X + 98)^2 - [(X + 1)^2 + (X + 3)^2 + \ldots + (X + 99)^2].$$

Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $P(x) > 0$.

*(M. Trifu, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.A.72.** Fie $S = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$; $n \in \mathbf{N}^*$.

Să se afle $n$ astfel încît $S \equiv 10$.

*(* * *, etapa republicană, 1986, Rîmnicu Vîlcea)*

# CAPITOLUL VI

## ECUAȚII

**VII.A.73.** Să se rezolve ecuațiile :

a) $|x-3|+2|y+5|=0$.

b) $|x+7|+|3+x|=0$.

c) $2[x]+7x=x+18$, $[x]$ este partea întreagă a lui $x$.

d) $mx+3=x+m+2$, $m \in \mathbf{R}$.

e) $6-(x^2+y^2+z^2)=x+y+z=3$.

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VII.A.74.** Să se rezolve în $\mathbf{Z}$ ecuațile :

a) $|1\,986-|x-1\,988||=1\,987$.

b) $\left|\frac{x-1}{2}\right|+\left|\frac{2(x-1)}{3}\right|+\left|\frac{3(x-1)}{4}\right|=0$.

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița)*

**VII.A.75.** Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația :

$$5x^2-4x=4y(x-y)-1.$$

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VII.A.76.** Câți termeni trebuie adunați consecutiv începînd cu 1, din suma $1+2+3\ldots$ pentru a obține un număr format din trei cifre identice ?

*(Test pentru elevii din județul Călărași, 1987)*

**VII.A.77.** Rezolvați în numere naturale ecuația :

$$xy+6(x+y)=1\,987.$$

*(Etapa județeană, 1987, Călărași)*

**VII.A.78.** Să se afle numerele naturale nenule $x$, $y$ și $z$, știind că satisfac simultan condițiile :

a) $x \leq y \leq z$.

b) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1\,766}{xyz}$.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VII.A.79.** Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\ldots+\frac{x+1\,987}{1\,988}=1\,987.$$

*(Etapa județeană, 1987, Caraș-Severin)*

**VII.A.80.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația :

$$3x^2+2xy+3y^2=664.$$

*(* * *, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.A.81.** Să se rezolve în numere naturale ecuația :

$$x+\frac{x}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{yz}$$

*(Bogdan Suceavă, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VII.A.82.** Să se arate că :

a) există $a, b, c \in Z$, astfel încît $a^2+b^2-8c=9$ ;

b) nu există $a, b, c \in Z$, astfel încît $a^2+b^2-8c=6$.

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VII.A.83.** Un biciclist calculează că dacă va merge cu 30 km/h, va ajunge la timp la destinație. El parcurge jumătate din drum cu 40 km/h. A ajuns cu o oră mai devreme. Să se afle lungimea drumului.

*(* * *, etapa republicană, 1980, București)*

**VII.A.84.** O mulțime $M$ formată numai din numere naturale este constituită în modul următor : sînt satisfăcute simultan condițiile :

a) $1 \in M$ ;

b) dacă $x \in M$ atunci $3x \in M$ ;

c) dacă $5x-4 \in M$ atunci $x \in M$.

Demonstrați că $11 \in M$.

*(Liviu Pîrșan, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

## INDICAȚII

**VII.A.1.** Descompuneți numărul 1 323 și observați că $c \leq 5$.

**VII.A.2.** Deduceți că $x$ are două cifre și apoi că : $44 \leq x \leq 50$.

**VII.A.3.** Faceți ca bazele să fie numere prime.

**VII.A.4.** Din $abc - c \equiv 4$, rezultă $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ ș.a.m.d.

**VII.A.5.** Descompuneți numărul $p^2 - 1$ și observați că dintre trei numere consecutive, unul se divide cu 3 și că $p - 1$ și $p + 1$ sînt numere pare consecutive.

**VII.A.6.** $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$ cu $a, b, c, d \in \mathbf{N}$. Efectuați produsul $m \cdot n$ și puneți în evidență o sumă de binoame la pătrat.

**VII.A.7.** $\frac{n}{2} = x^2$ și $\frac{n}{3} = y^3$ ; $2x^2 = 3y^2$.

**VII.A.8.** Observați că numărul dat este cuprins între două pătrate perfecte.

**VII.A.9.** Dați factor comun la numărător și la numitor.

**VII.A.10.** Fie $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}^*$ și $(p, q) = 1$.

Atunci : $x + \frac{1}{x} = \frac{p^2 + q^2}{pq}$, $p | p^2$ și $q | q^2$ ș.a.m.d.

**VII.A.11.** Calculați $E(2)$ și $E(3)$ și deduceți că $6 | p$.

**VII.A.12.** $\left.\begin{matrix} n \in \mathbf{N} \\ \text{și } a \in \mathbf{N} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbf{N} \Rightarrow$ există $p \in \mathbf{N}$ astfel încît $a = p^2$.

**VII.A.13.** Puneți condiția de existență a radicalului și deduceți că

$$x \in (0, 1), x = \frac{1}{1 + q^2}, \quad q \in \mathbf{Z}^*.$$

**VII.A.14.** Scoateți factori de sub radicali.

**VII.A.15.** Scoateți factori de sub radicali și efectuați calculele indicate.

**VII.A.16.** 1. Se amplifică fiecare fracție cu conjugata numitorului.

2. Cercetați ultima cifră a numărului $5k + 2$, $k \in \mathbf{N}$.

**VII.A.17.** $x^2 \leq 11 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 \leq (3 - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x - 3 + \sqrt{2})(x + 3 - \sqrt{2}) \leq 0$ ș.a.m.d.

**VII.A.18.** Aduceţi $a$ şi $b$ la o formă mai simplă.

**VII.A.19.** a) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} \equiv \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} \equiv 3+\sqrt{2}$.

b) Puneţi condiţiile : $n$ pătrat perfect, $10-\sqrt{n}$ pătrat perfect şi $10-\sqrt{n} \geqslant 0$.

**VII.A.20.** Arătaţi că $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}} \geq 6$.

**VII.A.21.** Obţineţi pentru $p$ o formă mai simplă şi apoi folosiţi echivalenţa : $x^2 < m^2 \Leftrightarrow (x-m)(x+m) < 0$.

**VII.A.22.** Observaţi inegalităţile : $k^2+2k+1 < k^2+4k < k^2+4k+4$.

**VII.A.23.** Arătaţi că $A^2 < B^2$.

**VII.A.24.** Descompuneţi numărul 120 în factori primi.

**VII.A.25.** a) Rezolvaţi sistemul format din ecuaţiile : $f(-4) = -2$ şi $f(2) = 0$.

**VII.A.26.** Se impun condiţiile $m-2 < 0$, $-(12+4m) \leq 0$ şi $4(m-2)+3 \geqslant -(12+4m)\cdot 4+5m-11$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $f_7(x) = g(x)$ pe intervalul $(-\infty, 4)$, respectiv $[4, +\infty)$.

**VII.A.27.** Rezolvaţi ecuaţia pe fiecare interval.

**VII.A.28.** a) Determinaţi $m \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuaţia $f_m(x) = 0$ adică, $\sqrt{(mx-1)^2}+\sqrt{(x-m)^2} = 0$ adică $|mx-1|+|x-m| = 0$ să aibă soluţii.

b) Observaţi că graficele funcţiilor $f_1$ şi $f_{-1}$ au „ramuri" paralele (avînd în formulele lor acelaşi coeficient al lui $x$) şi evidenţiaţi triunghiuri asemenea.

**VII.A.29.** Daţi lui $x$ valoarea 0, respectiv 1 în relaţia dată.

**VII.A.30.** Daţi lui $x$ valorile 0 şi $\frac{a}{3}$.

**VII.A.31.** Folosiţi inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică a numerelor $m$ şi $n$ şi faptul că inegalitatea devine egalitate cînd $m = n$.

**VII.A.32.** Transformaţi $P(x)$ în produs de factori de gradul I.

**VII.A.33.** Țineți cont de identitatea de la punctul a).

**VII.A.34.** a) $P(X) = X^4 + 1\,986X^3 + X^2 + 1\,986X + 1\,986 + 1$ și descompuneți apoi polinomul $X^4 + X^2 + 1$.

b) Fiecare factor din descompunerea polinomului este pozitiv oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. De exemplu :

$$x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(2x^2 + 2x + 2) = \frac{1}{2}[(x+1)^2 + x^2 + 1] > 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

**VII.A.35.** a) Numitorul se scrie $(3X - 1)^2 - 4$ și descompunerea lui sugerează descompunerea numărătorului.

b) $625 = 25^2$ ș.a.m.d.

**VII.A.36.** La numitor se obține $(a + b - 1)(a + b + 1)$, ceea ce sugerează și descompunerea numărătorului.

**VII.A.37.** $F(X) = \dfrac{(X+1)(X+2)}{(X+1)(X+2)}$ ș.a.m.d.

**VII.A.38.** Numitorul se poate scrie $X^7(X^2 + X + 1) - (X^2 + X + 1)$.

**VII.A.39.** b) $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$.

**VII.A.40.** Notați $1\,986 = x$.

**VII.A.41.** Studiați, de exemplu, mai întîi un caz particular care să sugereze cazul general.

**VII.A.42.** Analizați paritatea numerelor $a$, $b$, $c$.

**VII.A.43.** $M = a^2(x+3) - b^2(x+3) = (a^2 - b^2)(x+3)$ și țineți cont de faptul că $a$ și $b$ sînt întregi impare.

**VII.A.44.** Prelucrați expresiile ca să puteți folosi datele.

**VII.A.45.** Din relația dată, echivalentă cu o sumă de pătrate nulă, rezultă $x$ și $y$.

**VII.A.46.** Dați factor comun „forțat" pe $y \neq 0$ în ambele paranteze.

**VII.A.47.** Se ridică la pătrat în ambii membri ai relației date.

**VII.A.48.** Folosiți relația : $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$.

**VII.A.49.** Folosind formulele de calcul, scrieți sub o formă mai simplă datele problemei.

**VII.A.50.** Obțineți din $x = bc + \frac{1}{a}$, $ax = abc + 1$ și analoagele, le adunați membru cu membru și folosiți ipoteza.

**VII.A.51.** Transformați în produs expresia $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$ și folosiți inegalitățile cunoscute dintre laturile unui triunghi.

**VII.A.52.** Scrieți numărul ca o sumă de termeni de tipul $a_k^{2n} - 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, descompuneți fiecare termen în factori și observați că apare produsul $(a_k - 1)(a_k + 1)$, care se divide cu 3, pentru că dintre numerele consecutive $a_k - 1$, $a_k$, $a_k + 1$, unul se divide cu 3 ($a_k$ nedivizîndu-se din ipoteză !).

**VII.A.53.** Efectuați calculele în membrul stîng al identității de demonstrat și folosiți ipoteza.

**VII.A.54.** Inegalitatea este echivalentă cu inegalitatea $a + b \leqslant a^2 + b^2$.

**VII.A.55.** Folosiți inegalitatea $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}_+^*$.

**VII.A.56.** Folosiți inegalitatea $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ oricare ar fi $a \in \mathbf{R}_+^*$.

**VII.A.57.** $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow (x^2 + y^2 \geqslant 2 \Leftrightarrow x^2 + (2 - x^2) \geqslant 2)$ s.a.m.d. sau folosiți inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor $x$ și $y$.

**VII.A.58.**

$$E(x) = x^2 - 2\frac{1}{m}x + \frac{1}{m^2} + \frac{m^2+1}{m} - \frac{1}{m^2} = \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m+1)-1}{m^2}.$$

**VII.A.59.** $(a-3)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 6a + 25} = \sqrt{(a-3)^2 + 16} \geqslant \sqrt{16} = 4$.

**VII.A.60.** $-9 \leqslant x \leqslant 7 \Leftrightarrow 0 \leqslant 9 + x \leqslant 16 \Leftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{9+x} \leqslant 4$ s.a.m.d.

**VII.A.61.** Observați că $a^2 + a + 1 \geqslant 3a$ și celelalte.

**VII.A.62.** a) $x + y \geqslant 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0$.

b) Aplicați inegalitatea de la punctul a) numerelor $a^2$ și $b^2$, $c^2$ și $d^2$, s.a.m.d. și adunați inegalitățile membru cu membru (folosind și datele problemei).

**VII.A.63.** a) Inegalitatea este echivalentă cu o inegalitate formată dintr-o sumă de binoame la pătrat.

b) $(x+y+z)^2 \equiv \ldots$ și folosiți punctul a).

**VII.A.64.** Utilizați identitatea : $x^2+y^2+z^2 \equiv (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}$, pentru $x, y, z$ convenabil alese.

**VII.A.65.** a) $a^2-bc=b^2-ac \Rightarrow a^2-b^2=c(b-a) \Rightarrow (a-b)(a+b+c)=0$.

b) Folosiți inegalitățile de la punctul a).

**VII.A.66.** Utilizați identitatea : $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ și inegalitatea : $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbf{R}$.

**VII.A.67.** a) Cu $y=1-x$ obțineți inegalitatea : $\frac{x+1}{x} \cdot \frac{2-x}{1-x} \geqslant 9$ ș.a.m.d.

b) $0<x<1 \Rightarrow [x]=0$ și $[y]^2<9 \Rightarrow 0<y<4$ ș.a.m.d.

**VII.A.68.** Grupați termenii sumei doi cîte doi.

**VII.A.69.** $2+4+6+\ldots+2n=2(1+2+3+\ldots+n)=2\cdot\frac{(1+n)n}{2}$.

**VII.A.70.** Pentru calculul lui $P(6)$ dați factor comun în primii doi termeni, adunați ș.a.m.d.

**VII.A.71.** Asociați primul termen al sumei cu primul termen al sumei din paranteza dreaptă, al doilea... cu al doilea..., ș.a.m.d. și transformați în produse diferențele de pătrate care apar.

**VII.A.72.** Raționalizați numitorii fiecărei fracții.

**VII.A.73.** a) și b). Țineți cont că $|x| \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și că $|x| = x$ pentru $x \geqslant 0$ și $|x| = -x$, pentru $x < 0$.

c) $x=[x]+r$, $0 \leqslant r < 1$.

d) Obțineți $(m-1)x = m-1$ și discutați după $m$.

e) Puneți în evidență o sumă de pătrate egală cu zero.

**VII.A.74.** a) Explicitați modulul.

b) $|x| \geqslant 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

**VII.A.75.** Puneți în evidență, pătrate de binoame.

**VII.A.76.** Determinați $n$ din suma $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ care să satisfacă condițiile impuse.

**VII.A.77.** Ecuația este echivalentă cu ecuația $(x+6)(y+6)=2\,023$.

**VII.A.78.** Ecuația este echivalentă cu ecuația : $(1+x)(1+y)(1+z)=$ $=3\cdot19\cdot31$.

**VII.A.79.** $1\,987=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{1\,987 \text{ de } 1}$. Scădeți 1 din fiecare fracție din membrul stîng al ecuației.

**VII.A.80.** Scrieți ecuația într-o formă echivalentă, de exemplu : $2(x+y)^2+(x-y)^2=664$ sau $2u^2+v^2=664$, cu $u=x+y$ și $v=x-y$.

**VII.A.81.** Ecuația se scrie echivalent $xyz+xz+y=1$, $x$ și $y$ fiind nenule, sau : $ay+a+y=1$, unde $a=xy$.

**VII.A.82.** a) Observați, de exemplu, că $a^2+b^2$ este impar. Fie $c=1$ ș.a.m.d.

b) $a^2+b^2$ este par $\Rightarrow$ $a$ și $b$ pare sau $a$ și $b$ impare.

**VII.A.83.** Notați cu $x$ lungimea cerută și formați o ecuație.

**VII.A.84.** Din a) și b) rezultă $3\in M$, $9\in M$, $27\in M$ etc.

# GEOMETRIE

## CAPITOLUL I

## PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIURILOR

**VII.G.1.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic în $A$ cu $\hat{B} > \hat{C}$. Fie $D$ mijlocul ipotenuzei $BC$. Perpendiculara în $D$ pe $BC$ intersectează cateta $AC$ în $E$.

a) Demonstrați că $m(\hat{ADE}) \equiv m(\hat{B}) - m(\hat{C})$.

b) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$ știind că $AE = ED$.

*(I. Diaconu, C. Timiraș, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.G.2.** Pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ se iau punctele $E$ și $F$ astfel încît $BE = EF = FC$. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$ știind că dreapta $AE$ trece prin mijlocul bisectoarei $BB'$ ($B' \in AC$) și dreapta $AF$ trece prin mijlocul înălțimii $CC'$ ($C' \in AB$).

*(Etapa județeană, 1987, Buzău)*

**VII.G.3.** În triunghiul ascuțitunghic $ABC$, punctele $M$, $N$, $P$ sînt mijloacele laturilor $AB$, $AC$ respectiv $BC$, iar $AA'$, $BB'$ sînt înălțimile triunghiului $ABC$. Demonstrați că triunghiurile $A'MN$, $B'MP$ și $MNP$ sînt congruente.

*(Etapa județeană, 1987, Hunedoara)*

**VII.G.4.** Fie $M$ și $N$ simetricele ortocentrului triunghiului echilateral $ABC$ față de dreapta $AC$ și respectiv dreapta $BC$, iar $D$ intersecția dreptelor $MN$ și $AC$. Arătați că $AC = 3CD$.

*(Selecție lot olimpic, 1987, București)*

**VII.G.5.** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$. Se consideră pe dreapta $BC$ punctele $D$ și $E$ astfel încît $BD = AB$ și $CE = AC$. Aflați măsura unghiului $DAE$.

*(Selecție lot olimpic, 1987, București)*

**VII.G.6.** Fie $A'$, $B'$, $C'$ mijloacele laturilor $BC$, $AC$, $AB$ ale triunghiului $ABC$ și fie $D$ simetricul lui $B'$ față de $C'$. Calculați lungimile laturilor și medianelor triunghiului $AA'D$ în funcție de lungimile laturilor și medianelor triunghiului $ABC$.

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**VII.G.7.** a) Fie un triunghi $ABC$ și un punct $D$ pe latura $BC$. Arătați că dreapta $AD$ este axă de simetrie a triunghiului dacă și numai dacă segmentele $AB$ și $AC$ sînt congruente, iar dreptele $AD$ și $BC$ sînt perpendiculare.

b) Arătați că un triunghi este echilateral dacă și numai dacă el admite două axe de simetrie.

*(* * *, etapa republicană, 1985, Tulcea)*

## CAPITOLUL II

## CERCUL

**VII.G.8.** În triunghiul $ABC$ fie înălțimea $AA'$ și fie $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AB$ și $AC$. Arătați că punctele $A, M, A', N$ sînt conciclice dacă și numai dacă $m(\widehat{A}) = 90°$.

*(Etapa județeană, 1987, Vrancea)*

**VII.G.9.** În patrulaterul inscriptibil $ABCD$, bisectoarea unghiului $DCA$ intersectează diagonala $BD$ în $P$, iar bisectoarea unghiului $ABD$ intersectează diagonala $AC$ în $Q$. Arătați că:

a) patrulaterul $PQBC$ este inscriptibil;

b) $PQ \parallel AD$.

*(Etapa județeană, 1987, Olt)*

**VII.G.10.** Arătați că, într-un patrulater inscriptibil două laturi consecutive sînt congruente dacă și numai dacă unul din unghiurile patrulaterului este congruent cu unghiul format de diagonale.

*(Etapa județeană, 1987, Maramureș)*

**VII.G.11.** Pe laturile $AB$ și $AC$ ale triunghiului echilateral $ABC$ se iau punctele $E$, respectiv $F$, astfel încît $BE = 2 \cdot AE$, și $AF = 2 \cdot CF$. Fie $D$ intersecția segmentelor $BF$ și $CE$. Arătați că $AD \perp BF$.

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VII.G.12.** Fie un pentagon convex $ABCDE$ în care $AB \perp BC$, $AD \perp DE$ și $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ADB})$. Arătați că $m(\widehat{BAC}) \equiv m(\widehat{DAE})$.

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VII.G.13.** Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și fie $E$ intersecția dreptelor $AB$, $CD$ iar $F$ intersecția dreptelor $BC$, $AD$. Bisectoarea interioară a unghiului $AFB$ taie laturile $AB$, $CD$ în $P$, respectiv $M$, iar bisectoarea interioară a unghiului $AED$ taie laturile $AD$, $BC$ în $Q$, respectiv $N$. Arătați că $MNPQ$ este romb.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1986, Vîlcea)*

**VII.G.14.** Se consideră un triunghi isoscel $ABC$ $(AB = AC)$ obtuzunghic. Pe înălțimea $AD$ se fixează un punct $E$ $(D \in BC$, $E$ între $A$ și $D)$. Fie $M$ un punct pe segmentul $BC$ astfel încît perpendiculara din $E$ pe $AM$ să intersecteze segmentul $BC$ într-un punct $N$.

a) Arătați că $ME \perp AN$ și precizați pozițiile posibile ale punctelor $M$ și $N$.

b) Arătați că simetricul $E'$ al ortocentrului $F$ al triunghiului $AMN$ față de $BC$ se află pe cercul circumscris triunghiului $AMN$.

c) Arătați că centrul cercului circumscris triunghiului $AMN$ se află pe mediatoarea segmentului $AE'$.

*(***, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VII.G.15.** Hexagonul $AEBDCF$ convex, este înscris într-un cerc și are următoarele proprietăți : dreptele $AD$, $CE$ și $BF$ sînt concurente într-un punct $M$ (în interiorul triunghiului $ABC$) ; $AE = AM = AF$ ; $BE = BM$ ; $CM = CF$. Este punctul $M$ centrul cercului înscris în triunghiul care are ca vîrfuri picioarele înălțimilor triunghiului $ABC$ ?

*(Etapa pe municipiu, 1987, București)*

**VII.G.16.** Fie pătratul $ABCD$ exterior pătratului $AEFG$, cu $D$ și $E$ de aceeași parte a dreptei determinate de centrele lor, $O$ și $O'$. ($O$ pe segmentul $BD$). Fie $H$ intersecția segmentelor $BE$ și $DG$. Arătați că :

a) punctele $C$, $H$, $F$ sînt coliniare ;

b) dreptele $AH$ și $OO'$ sînt perpendiculare.

*(Etapa județeană, 1987, Tulcea)*

**VII.G.17.** Fie triunghiul dreptunghic isoscel $ABC$, $m(\widehat{BAC}) = 90°$, $M$ un punct oarecare pe $BC$, iar $P$ și $Q$ proiecțiile lui $M$ pe $AB$, respectiv $AC$. Arătați că :

a) $MP + MQ \equiv$ constant cînd $M$ descrie segmentul $BC$ ;

b) dacă $D$ este mijlocul lui $BC$, patrulaterul $DPAQ$ este inscriptibil.

*(Etapa județeană, 1987, Caraș-Severin)*

**VII.G.18.** Fie $M$ un punct variabil pe coarda $AB$ a cercului de centru $O$. Cercurile ce trec prin punctele $A$, $M$, $O$, respectiv $B$, $M$, $O$ intersectează cercul dat în $C$ și $D$.

Arătați că :

a) triunghiurile $MAD$ și $MBC$ sînt isoscele ;

b) $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMD}$ și $\widehat{OMC} \equiv \widehat{OMB}$ ;

c) punctele $C$, $D$, $M$ sînt coliniare ;

d) patrulaterul $ACBD$ este trapez isoscel.

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VII.G.19.** Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și $E$ punctul comun dreptelor $AD$ și $BC$. Perpendicularele în $C$ și $D$, respectiv pe $CB'$ și $DA$ se intersectează în $I$. Arătați că dreptele $EI$ și $AB$ sînt perpendiculare.

*(Etapa județeană, 1987, Prahova)*

**VII.G.20.** Două cercuri secante de centre $O$ și $O'$ au punctele $B$ și $C$ comune. Fie $A$ pe cercul de centru $O$. Dreptele $AB$ și $AC$ intersectează cercul de centru $O'$ în $B'$, respectiv $C'$. Arătați că dreptele $B'C'$ și $AO$ sînt perpendiculare.

*(Etapa județeană, 1987, Olt)*

**VII.G.21.** Fie $AB$ diametrul cercului de centru $O$ și $M$, $N$ puncte situate pe semicercuri diferite. Dreptele $AM$ și $NB$ se intersectează în $C$, iar $MB$ și $NA$ în $D$. Demonstrați că :

a) $AB \perp CD$ ;

b) dacă $P$ este mijlocul segmentului $CD$, atunci dreapta $PM$ este tangentă la cerc.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**VII.G.22.** Demonstrați că, în orice triunghi, pentru fiecare înălțime, proiecțiile piciorului înălțimii respective pe celelalte două înălțimi și pe laturile corespunzătoare acestora sînt patru puncte coliniare.

*(Etapa județeană, 1987, Suceava)*

**VII.G.23.** Fie triunghiul $ABC$ cu $m(\widehat{A}) = 90°$. Notăm cu $r$ raza cercului înscris și cu $R$ raza cercului circumscris triunghiului dat.

a) Arătați că $2r + 2R = AB + AC$.

b) Dacă $AD$ este înălțimea triunghiului și $r_1$, $r_2$ razele cercurilor înscrise în triunghiurile $ABD$ și $ADC$, arătați că $AD = r + r_1 + r_2$.

*(Etapa județeană, 1987, Sibiu)*

**VII.G.24.** Fie patrulaterul $ABCD$ și $I$ intersecția diagonalelor $AC$ și $BD$. Fie $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$ centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AIB$, $BIC$, $CID$, $DIA$. Arătați că :

a) $\widehat{AI_1B} \equiv \widehat{DI_3C}$ ; $\widehat{AI_4D} \equiv \widehat{BI_2C}$ ;

b) patrulaterul $I_1I_2I_3I_4$ are diagonalele perpendiculare.

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**VII.G.25.** Fie triunghiul $ABC$ înscris în cercul de centru $O$ și rază $R$ avînd $m(\widehat{A}) = 60°$ și $AB \neq AC$. Fie $I$ centrul cercului înscris și $H$ ortocentrul triunghiului. Arătați că punctele $B$, $C$, $H$, $O$, $I$ sînt situate pe un cerc de rază $R$ al cărui centru este situat pe cercul de centru $O$ și rază $R$.

*(Etapa județeană, 1988, Satu Mare)*

**VII.G.26.** Fie $ABC$ un triunghi cu toate unghiurile ascuțite, $O$ centrul cercului circumscris și $H$ ortocentrul triunghiului $ABC$. Bisectoarea unghiului $A$ este perpendiculară pe $OH$. Arătați că $m(\widehat{BAC}) = 60°$.

*(Etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VII.G.27.** Fie $ABC$ un triunghi echilateral și fie $M$ un punct oarecare pe baza $BC$, diferit de mijlocul lui $BC$. Perpendiculara în $M$ pe $BC$ taie paralela din $A$ la $BC$ în punctul $O$. Cercul de centru $O$ și raza $OM$ intersectează segmentele $AB$ și $AC$ în punctele $P$ și $Q$. Arătați că punctele $A$, $O$, $Q$, $P$ sînt conciclice.

*(Vasile Brânzănescu, etapa republicană, 1987, Bacău)*

## CAPITOLUL III

## TRIUNGHIURI ASEMENEA

**VII.G.28.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic în $C$. Perpendiculara pe $AB$ dusă prin $D$, mijlocul ipotenuzei $AB$, intersectează dreptele $BC$ și $AC$ în $M$ respectiv $N$. Calculați lungimea ipotenuzei $AB$, dacă $DM = 3$ cm și $MN = 9$ cm.

*(Etapa județeană, 1987, Argeș)*

**VII.G.29.** Pe laturile unghiului $XOY$ se iau perechile de puncte $A$, $B \in OX$ și $C$, $D \in OY$ astfel încît $OA = 4$ cm, $OB = 15$ cm, $OC = 5$ cm, $OD = 12$ cm. Arătați că patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VII.G.30.** Fie $ABCD$ un paralelogram și fie $M$ un punct oarecare pe latura $BC$. Dreptele $AM$ și $DM$ intersectează prelungirile laturilor $CD$ și $AB$, respectiv în $P$ și $Q$. Arătați că produsul lungimilor segmentelor $BQ$ și $CP$ este constant cînd $M$ descrie latura $BC$.

*(* * *, etapa republicană, 1983, Pitești)*

**VII.G.31.** Într-un triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$, fie $BD$ bisectoarea unghiului $B$, ($D$ pe segmentul $AC$) și $A'$ simetricul lui $A$ față de $BD$. Arătați că :

a) $A'$ se află pe $BC$ ;

b) patrulaterul $ADA'B$ este inscriptibil ;

c) $AA' \cdot BC = BD \cdot AC$.

*(Etapa locală, 1988, Sălaj)*

**VII.G.32.** În trapezul $ABCD$, baza mică $CD$ are aceeași lungime cu latura $BC$, iar diagonala $BD$ este perpendiculară pe latura $AD$. Fie $O$ intersecția diagonalelor și $P$ mijlocul lui $BD$. Arătați că:

a) $AB = 2 \cdot CD$;

b) $6 \cdot OP = BD$.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VII.G.33.** În triunghiul echilateral $ABC$, fie $D$ mijlocul segmentului $BC$. Se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale $BDE$ și $CDF$. Fie $G$ intersecția dreptelor $AE$ și $BC$, iar $H$ intersecția dreptelor $AF$ și $BC$. Demonstrați că $BG = GH = HC$.

*(* * *, etapa republicană, 1984, Deva)*

**VII.G.34.** Fie $ABCD$ un patrulater convex și fie $M$ un punct al segmentului $AB$. Construim $MN \parallel BD$, $(N \in AD)$, $NP \parallel AC$, $(P \in CD)$, $PQ \parallel BD$, $(Q \in BC)$, $QM' \parallel AC$, $(M' \in AB)$.

a) Demonstrați că $M$ și $M'$ coincid.

b) Dacă $AC = 3$, $BD = 4$ și $MNPQ$ este romb, calculați lungimile laturilor acestui romb.

*(Etapa județeană, 1987, Sălaj)*

**VII.G.35.** Fie $ABCD$ un trapez oarecare cu bazele $AB$, $CD$ și $O$ intersecția diagonalelor $AC$ și $BD$. Paralela prin $O$ la baze taie laturile neparalele în $M$ și $N$. Arătați că $OM = ON$ și că $\frac{MN}{AB} + \frac{MN}{CD} = 2$.

*(* * *, etapa republicană, 1986, Vîlcea)*

**VII.G.36.** Fie $ABCD$ un patrulater convex. Arătați că, dacă există $M \in AD$ și $N \in BC$ cu proprietatea că $MN \parallel AB$ și dreapta $MN$ taie diagonalele $AC$ și $BD$ în $P$ respectiv $Q$ astfel încît $MP = NQ$, atunci $ABCD$ este trapez.

Știind că $AB = 8$ cm, $NP = 6$ cm și $AP = 1{,}5$ cm, calculați $AC$.

*(Etapa județeană, 1987, Timiș)*

**VII.G.37.** În capetele $A$, $B$ ale unui diametru al unui cerc se duc tangentele $AA'$ și $BB'$ la acel cerc.

Fie un punct $M$ pe cerc diferit de $A$ și $B$. Dreapta $AM$ taie $BB'$ în $C$, iar dreapta $BM$ taie $AA'$ în $D$. Demonstrați că $AB^2 = AD \cdot BC$.

*(* * *, etapa republicană, 1980, București)*

**VII.G.38.** Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și $O$ intersecția diagonalelor lui. O dreaptă $d$ împarte $\widehat{AOD}$ și $\widehat{BOC}$ în unghiuri congruente. Fie $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ proiecțiile punctelor $A$, respectiv $B$, $C$, $D$ pe dreapta $d$. Demonstrați că $AA_1 \cdot CC_1 = BB_1 \cdot DD_1$.

*(Etapa județeană, 1988, Alba)*

**VII.G.39.** Fie $EFGH$ patrulaterul convex care are laturile incluse în bisectoarele unghiurilor patrulaterului $ABCD$.

Demonstrați propozițiile :

a) Dacă $ABCD$ este trapez isoscel, atunci $EFGH$ este patrulater ortodiagonal.

b) Dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil, atunci $EFGH$ este un patrulater inscriptibil.

*(Etapa județeană, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**VII.G.40.** În triunghiul isoscel $ABC$ $(AB = AC)$, fie un punct $P$ pe mediana $AD$, $(D \in BC)$ ; fie $B'$ și $C'$ punctele de intersecție ale dreptelor $BP$ și $CP$ cu laturile $AC$ și respectiv $AB$. Arătați că :

a) triunghiul $DB'C'$ este isoscel ;

b) dreptele $B'C'$ și $BC$ sînt paralele ;

c) dacă $P$ este mijlocul segmentului $AD$, atunci $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{3}$.

*(Etapa județeană, 1987, Vîlcea)*

**VII.G.41.** Fie $D$ pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ și $E$ situat pe segmentul $AD$. Notăm $\frac{BD}{DC} = k_1$ și $\frac{EA}{ED} = k_2$. Fie $F$ intersecția dreptelor $BE$ și $AC$.

Exprimați $\frac{AF}{FC}$ în funcție de $k_1$ și $k_2$.

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VII.G.42.** Prin punctul $M$ situat în interiorul triunghiului $ABC$, se duc paralele la laturile triunghiului : $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$ și $C_1C_2 \parallel AB$ ; $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ fiind puncte situate pe laturile triunghiului. Arătați că suma $\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{AC} + \frac{C_1C_2}{AB}$ nu depinde de alegerea punctului $M$.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**VII.G.43.** Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $2 \cdot BC = 3 \cdot AB$. Fie $M$, $N \in BC$ astfel încît $BM = MN = NC$ și $P \in AB$ cu $PA = PB$. Arătați că :

a) triunghiurile $PBN$ și $NCD$ sînt congruente și $MD = 2 \cdot PM$ ;

b) triunghiul $PMD$ este dreptunghic ;

c) patrulaterul $APMN$ este trapez isoscel ;

d) punctele $P$, $M$, $N$, $D$, $A$ se găsesc pe același cerc.

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VII.G.44.** Într-un triunghi $ABC$, $A'$, $B'$, $C'$ sînt picioarele înălțimilor din $A$, $B$, $C$, iar $D$ și $E$ proiecțiile lui $A'$ pe laturile $AB$, respectiv $AC$. Demonstrați că punctele $C'$, $B'$, $E$, $D$ sînt conciclice dacă și numai dacă $AB \equiv AC$.

*(Etapa județeană, 1987, Galați)*

**VII.G.45.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare. Cercul care trece prin $C$ și este tangent în $A$ la dreapta $AB$ se intersectează a doua oară cu cercul care trece prin $A$ și este tangent în $B$ la dreapta $BC$ în punctul $P$. Un punct oarecare $M$ din planul triunghiului se proiectează pe dreptele $PA$, $PB$ și $PC$ în punctele $A'$, $B'$, respectiv $C'$. Arătați că triunghiurile $A'B'C'$ și $ABC$ sînt asemenea.

*(Etapa județeană, 1987, Bihor)*

**VII.G.46.** Cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ se intersectează în $A$ și $P$, iar secanta $BP$, $B \in \mathcal{C}(O_1, r_1)$ taie $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în $C$. Fie $B'$ respectiv $C'$ diametral opuse lui $A$ în $\mathcal{C}(O_1, r_1)$, respectiv $\mathcal{C}(O_2, r_2)$. Arătați că:

a) punctele $B'$, $P$, $C'$ sînt coliniare;

b) $\widehat{O_1BA} \equiv \widehat{O_2CA}$;

c) $AP$ este bisectoarea unghiului $A$ în triunghiul $ABC$ dacă și numai dacă segmentele $BP$, $PC$ sînt proporționale cu $O_1A$, $O_2A$.

*(Etapa județeană, 1987, Constanța)*

**VII.G.47.** Fie pătratul $ABCD$. Din $A$ pornesc simultan, pe laturi, două mobile $M_1$ și $M_2$, unul spre $B$ și celălalt spre $D$. Viteza lui $M_1$ este $v$, iar viteza lui $M_2$ este $2v$.

a) După cît timp are loc prima întîlnire și în ce punct?

b) Desenați linia frîntă parcursă de mijlocul segmentului $M_1M_2$ pînă la prima întîlnire.

*(* * *, etapa republicană, 1984, Deva)*

**VII.G.48.** Pe catetele $CA$ și $CB$ ale triunghiului dreptunghic isoscel $ABC$ se aleg punctele $D$ și $E$ astfel încît $CD = CE$. Perpendicularele coborîte din $D$ și $C$ pe dreapta $AE$ intersectează ipotenuza $AB$ respectiv în punctele $K$ și $L$. Demonstrați că $LK = LB$.

*(Etapa județeană, 1987, Vrancea)*

**VII.G.49.** Fiind dat un paralelogram, construiți, numai cu ajutorul riglei negradate, mijlocul unei laturi.

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VII.G.50.** Fie triunghiul $ABC$ neisoscel și $M$ mijlocul segmentului $BC$. Fie $P$ un punct oarecare pe $AM$. Fie $E$ și $F$ proiecțiile punctului $P$ pe laturile $AB$, respectiv $AC$. Arătați că $EF \parallel BC$ dacă și numai dacă $m(\widehat{BAC}) = 90°$.

*(I. Diaconu, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VII.G.51.** Fie două cercuri de centre $O_1$, $O_2$ care se taie în punctele $A$ și $B$. Fie $C$ și $D$ punctele diametral opuse lui $A$ în cele două cercuri. Tangentele duse prin $A$ la cercurile $O_1$ respectiv $O_2$ intersectează cercurile $O_2$ respectiv $O_1$ în $M$ respectiv $N$. Prelungim segmentul $AB$ cu un segment $BP$ astfel încît $B$ să fie mijlocul segmentului $AP$. Arătați că :

a) punctele $C$, $B$, $D$ sînt coliniare ;

b) patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1986, Vîlcea)*

## CAPITOLUL IV

## RELAȚII METRICE

**VII.G.52.** În triunghiul $ABC$, $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $AB \equiv 4$ cm, iar $AC = 5$ cm Bisectoarea unghiului $ACB$ intersectează segmentul $AB$ în $D$ ; înălțimea din $D$ a triunghiului $BCD$ intersectează pe $BC$ în $M$, iar paralela prin $M$ la $AB$ intersectează pe $AC$ în $P$. Calculați lungimile segmentelor $AP$ și $PC$.

*(Etapa județeană, 1987, Tulcea)*

**VII.G.53.** Perpendicularele pe diagonala $BD$ a dreptunghiului $ABCD$ duse în $B$ și $D$ interesectează laturile $DC$ și respectiv $BD$ în $M$, respectiv $N$. Să se arate că :

a) $\frac{AB}{BC} = \frac{BN}{DM}$ ;

b) $\frac{BM}{BN} = \frac{AD}{DN}$ ;

c) $\frac{BM}{DM} = \frac{AB}{DN}$ ;

d) $AB^2 + BC^2 = BM \cdot DN$.

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

**VII.G.54.** Fie $a$, $b$, $c$ lungimile laturilor unui triunghi care satisfac relația :

$$\frac{3b^2(a-c)^2 + 12ab^2c}{a^4 + 2a^3c - c^4 - 2ac^3} = 3.$$

Stabiliți natura triunghiului.

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

**VII.G.55.** Arătați că dacă într-un triunghi cu laturile $a$, $b$, $c$ există relația :

$$(a^2-b^2)\left(1-\frac{c}{a}\right)\equiv\frac{a^2b^2-b^4}{a^2+2ac+c^2}\left(1+\frac{c}{a}\right),$$

atunci triunghiul este isoscel sau dreptunghic.

*(Etapa județeană, 1987, Timiș)*

**VII.G.56.** Pe latura $AD$ a pătratului $ABCD$ se ia un punct $M$ astfel încît $\frac{DM}{MA}\equiv\frac{1}{3}$. Fie $E$ punctul de intersecție al dreptelor $DC$ și $BM$ iar $F$ punctul de intersecție al dreptelor $AB$ și $CM$. Calculați lungimea segmentului $EF$ în funcție de latura $a$ a pătratului $ABCD$.

*(Etapa județeană, 1987, Arad)*

**VII.G.57.** În pătratul $ABCD$, fie $O$ intersecția diagonalelor, iar $E$ și $F$ mijloacele segmentelor $BO$ și $CD$. Știind că $AB=a$, calculați lungimea segmentului $EF$.

*(Etapa județeană, 1987, Sălaj)*

**VII.G.58.** Un patrulater convex are trei laturi de lungime $a$. Două din laturile congruente sînt perpendiculare, iar celălalt unghi format de laturi congruente are 60°.

a) Aflați măsura celorlalte unghiuri ale patrulaterului.

b) Aflați lungimile diagonalelor și a celei de a patra laturi a patrulaterului.

*(Etapa județeană, 1987, Hunedoara)*

**VII.G.59.** Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\widehat{A})=90°$, cu bazele $AD=4$ și $BC=9$ și cu $DC=13$.

a) Dacă $M$ este mijlocul laturii $AB$ atunci triunghiul $DMC$ este dreptunghic.

b) Fie $O$ intersecția diagonalelor trapezului. Paralela prin $O$ la baze intersectează segmentul $AB$ în $E$. Demonstrați că $EO$ este bisectoarea unghiului $DEC$.

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VII.G.60.** Fie $ABC$ un triunghi avînd lungimile laturilor $AB=a$, $AC\equiv a\sqrt{2}$, $BC\equiv a\sqrt{3}$. Fie $P$ piciorul înălțimii din $A$ pe latura $BC$, iar $M$ și $N$ proiecțiile lui $P$ pe laturile $AB$, respectiv $AC$. Calculați lungimea segmentului $MN$ în funcție de $a$.

*(M. Trifu, etapa republicană, 1986, Vîlcea)*

**VII.G.61.** Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AD = BC$, diagonala $AC$ perpendiculară pe $BC$ și unghiurile de la bază de $60°$. Pe baza mare $AB$ se ia un punct $M$ astfel încît $\frac{AM}{MB} = \frac{4-\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-4}$.

Fie $d_1$ perpendiculara în $M$ pe $AB$ și $d_2$ perpendiculara în $A$ pe $AC$, iar $d_1 \cap d_2 = \{N\}$.

Să se arate că distanța de la punctul $N$ la baza mică a trapezului $ABCD$ este egală cu $AB$.

*(Etapa județeană, 1987, Tulcea)*

**VII.G.62.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel avînd $AB = AC = a$. Pe baza $BC$ se construiește un pătrat de latură $BC$ care trece prin $A$ iar pe înălțimea $AD$ ca diametru se construiește un cerc care taie segmentul $AB$ în $M$ și segmentul $AC$ în $N$. Calculați $MN$ în funcție de $a$.

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VII.G.63.** Într-un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, diagonalele sînt perpendiculare. Știind că lungimea razei cercului circumscris trapezului este de 5 cm, iar distanța de la centrul $O$ al acestui cerc la punctul $M$ de intersecție al diagonalelor este de $3\sqrt{2}$ cm, calculați perimetrul trapezului.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VII.G.64.** Fie $ABC$ un triunghi și $AM$ o mediană a sa, $M \in BC$. Pe mediana $AM$ se ia un punct oarecare $P$. Dreapta $BP$ intersectează segmentul $AC$ în $D$, iar dreapta $CP$ intersectează segmentul $AB$ în $E$.

a) Cercetați și justificați dacă $DE \parallel BC$.

b) Dacă $m(\widehat{A}) = 45°$ și $BC = 10$ cm, calculați raza cercului circumscris triunghiului $ABC$.

*(Etapa județeană, 1987, Argeș)*

**VII.G.65.** Fie triunghiul $ABC$.

a) Arătați că bisectoarea unui unghi al triunghiului coincide cu bisectoarea unghiului format de înălțimea și diametrul cercului circumscris ce pleacă din același vîrf.

b) Arătați că ortocentrul, mijlocul unei laturi și extremitatea diametrului ce pleacă din vîrful opus laturii respective, sînt trei puncte coliniare.

c) Fie $H$ ortocentrul și $O$ centrul cercului circumscris triunghiului. Arătați că : $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 12 \cdot AO^2 - (AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VII.G.66.** Fie $ABCD$ un paralelogram și $O$ intersecția diagonalelor. Calculați aria paralelogramului știind că aria triunghiului $AOB$ este 10.

*(Selecție lot olimpic, 1986, București)*

**VII.G.67.** Aflați perimetrul și aria unui romb cu latura 10 și un unghi de 120°.

*(Selecție lot olimpic, 1986, București)*

**VII.G.68.** Aflați aria unui paralelogram cu diagonalele de 40 și 74 și o latură de 51.

*(Selecție lot olimpic, 1986, București)*

**VII.G.69.** Trapezul isoscel $ABCD$ este circumscris unui cerc. Aflați perimetrul și aria lui știind că bazele sînt $AB = 16$ și $CD = 12$.

*(Selecție lot olimpic, 1986, București)*

**VII.G.70.** Fie $ABC$ un triunghi, iar $D$ și $E$ două puncte pe latura $BC$ astfel ca $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$. Arătați că dacă $BD = EC$, atunci triunghiul $ABC$ este isoscel.

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**VII.G.71.** Fie $ABCD$ un patrulater convex. Unind mijloacele laturilor opuse se obțin patru patrulatere, două cîte două opuse. Arătați că suma ariilor a două patrulatere opuse este egală cu suma ariilor celorlalte două patrulatere opuse.

*(Selecție lot olimpic, 1986, București)*

**VII.G.72.** Într-un triunghi $ABC$ se duc mediana $AD$ și bisectoarea interioară $AE$. Simetrica lui $AD$ față de $AE$ taie $BC$ în $F$. Determinați raportul distanțelor de la $F$ la laturile $AB$ și $AC$ în funcție de lungimile laturilor $AB$ și $AC$.

*(* * *, etapa republicană, 1980, București)*

**VII.G.73.** Bazele trapezului $ABCD$ au lungimile $AB = 21$ cm și $CD = 7$ cm, iar laturile neparalele $AD = 15$ cm, $BC = 13$ cm.

a) Calculați lungimile diagonalelor.

b) Arătați că bisectoarea unghiului $DAC$ este perpendiculară pe diagonala $BD$ a trapezului.

*(Etapa județeană, 1987, Sibiu)*

**VII.G.74.** În triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$, avem $AC = b$, $BC = 2b$. Se duce un cerc cu centrul în $A$ și raza $AC$, care taie ipotenuza $BC$ în $D$. Calculați :

a) lungimile segmentelor $CD$ și $DB$ ;

b) raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile $ACD$ și $ADB$.

*(Etapa județeană, 1987, Brașov, Ialomița)*

**VII.G.75.** Fie $AOB$ un sfert de cerc al cercului de centru $O$ și rază $R$ și semicercul descris pe $OA$ ca diametru. Calculați raza cercului tangent interior la sfertul de cerc, tangent exterior la semicerc și tangent la segmentul $OB$.

*(Etapa județeană, 1987, Maramureș)*

**VII.G.76.** Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare înscris într-un cerc de centru $O$ și rază $R$.

a) Calculați suma pătratelor lungimilor a două laturi opuse ale patrulaterului în funcție de raza cercului.

b) Arătați că distanța de la $O$ la $CD$ este $\frac{AB}{2}$.

*(* * *, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.G.77.** Fie pătratul $ABCD$ și $O$ punctul de intersecție a diagonalelor; $M$, $N$, $P$, $Q$ mijloacele segmentelor $AB$, $OB$, $DC$ și $DM$; $E$ intersecția dreptelor $NP$ și $AC$.

a) Arătați că $NE = EP$.

b) Determinați măsurile unghiurilor triunghiului $NPQ$.

c) Dacă $PQ$ și $BD$ se intersectează în $F$, determinați raportul $\frac{QF}{FP}$.

d) Dacă $QE$ și $BD$ se intersectează în $L$, arătați că $LE = LQ$.

e) Arătați că triunghiurile $AEP$ și $ANB$ sînt asemenea.

*(Etapa județeană, 1987, Constanța)*

**VII.G.78.** Într-un cerc de rază 1 avem coarda $AB = \sqrt{3}$ și coarda $AC = \sqrt{2}$. Aflați perimetrul triunghiului $ABC$.

*(Selecție lot olimpic, 1986, București)*

**VII.G.79.** Fie $ABC$ un triunghi echilateral și $M$ un punct în interior. Pe segmentele $MA$, $MB$, $MC$ se construiesc triunghiurile echilaterale $MAI$, $MBJ$, $MCK$ cu $I$, $J$, $K$ de aceeași parte a dreptelor $MA$, $MB$, $MC$ respectiv cu punctele $C$, $A$, $B$. Arătați că triunghiul format din centrele de greutate ale celor trei triunghiuri este echilateral.

*(Selecție lot olimpic, 1986, București)*

# CAPITOLUL V

## INEGALITĂȚI

**VII.G.80.** Fie $a$, $b$, $c$ direct proporționale cu $t-1$, $t$, $t+1$, unde $t \geqslant 2$.

a) Demonstrați că $a$, $b$, $c$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

b) Determinați pe $t$ astfel încît triunghiul să fie dreptunghic.

*(Etapa județeană, 1987, Teleorman)*

**VII.G.81.** Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$, numerele $3\sqrt{3} \cdot 2^n - 1$, $2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n$, $2^{n+1} - 2^n + 2^n - 1$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi și calculați unghiurile triunghiului.

*(Etapa județeană, 1987, Dolj, Gorj)*

**VII.G.82.** Cercetați dacă există un triunghi isoscel $ABC$ $(AC = BC)$ în așa fel încît bisectoarea unghiului $A$ să împartă latura $BC$ în două segmente de lungime 2 cm și 4 cm. În caz afirmativ, calculați perimetrul triunghiului.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VII.G.83.** Demonstrați că $\frac{x+y}{2} \geqslant xy$, $x$ și $y$ fiind numere reale pozitive.

Folosind acest rezultat arătați că $R(b+c) \geqslant a\sqrt{bc}$, unde $a$, $b$, $c$ sînt lungimile laturilor unui triunghi $ABC$ iar $R$ raza cercului circumscris. În ce caz are loc egalitatea ?

*(Etapa județeană, 1987, Mureș)*

**VII.G.84.** Fie triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $M$ și $N$ mijloacele catetelor $AB$, respectiv $AC$. Arătați că: $DM^2 + DN^2 \geqslant AD^2$. În ce caz are loc egalitatea ?

*(Etapa județeană, 1988, Vîlcea)*

**VII.G.85.** În interiorul unui cerc $\mathcal{C}(O, R)$ se ia un punct $P$ prin care se duc două coarde perpendiculare $AB$ și $CD$.

Demonstrați că $AB \cdot CD \leqslant 2 \cdot (2R^2 - OP^2)$.

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VII.G.86.** Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \parallel CD$, $AD \perp CD$ și diagonalele $AC$ și $BD$ sînt perpendiculare. Demonstrați că :

a) $AD^2 = AB \cdot CD$ ;

b) latura $AD$ este mai scurtă decît linia mijlocie a trapezului ;

c) dacă $\frac{AB}{CD} = k$, calculați $\frac{AC}{BD}$.

*(Etapa județeană, 1987, Buzău)*

**VII.G.87.** Fie $AD$ înălțimea triunghiului $ABC$. Fie $E$ și $F$ proiecțiile punctului $D$ pe laturile $AB$ și respectiv $AC$. Să se arate că segmentul $EF$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC$ dacă și numai dacă $DE + EF = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

*(Etapa județeană, 1988, Cluj)*

**VII.G.88.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic în $A$ cu $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și $AD$ înălțimea din $A$, $D \in BC$. Bisectoarea unghiului $B$ intersectează pe $AC$ în $E$ și perpendiculara în $C$ pe $BC$ în $F$.

a) Arătați că triunghiul $ECF$ este isoscel.

b) Calculați $AD$ și $FC$ în funcție de $a$, $b$, $c$.

c) Arătați că dacă $FC \geqslant AD$, atunci $DC \geqslant c$.

d) Arătați că aria patrulaterului $ABCF$ este $\frac{a \cdot b}{2}$.

*(Etapa județeană, 1987, Bihor)*

**VII.G.89.** În triunghiul $ABC$ cu $m(\widehat{C}) > 90^\circ$ se duc înălțimile $BA'$ și $AB'$ unde $A'$ aparține dreptei $AC$ și $B'$ aparține dreptei $BC$. Demonstrați că:

a) dreptele $AB'$ și $BA'$ sînt concurente într-un punct $H$;

b) triunghiul $ABH$ este ascuțitunghic.

c) Găsiți un punct $D$ pe segmentul $AB$ astfel încît patrulaterul $BDB'H$ să fie inscriptibil.

*(Acad. N. Teodorescu, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.G.90.** $ABCD$ este un dreptunghi de centru $O$, iar $M$ aparține laturii $CD$ astfel încît $AC^2 = 2 \cdot MC \cdot AB$. Analizați care din afirmațiile următoare sînt adevărate:

a) $2 \cdot MC > CD$;

b) mijlocul segmentului $MC$ este centrul cercului circumscris triunghiului $OMC$.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**VII.G.91.** Fie $ABC$ un triunghi oarecare cu $AB > AC$. Dacă $CF$ și $BE$ sînt respectiv medianele corespunzătoare laturilor $AB$ și $AG$ ($E$ și $F$ pe segmentele $AC$, respectiv $AB$), demonstrați că $BE > BF$.

*(* * *, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VII.G.92.** Fie triunghiul isoscel $ABC$, dreptunghic în $A$. Fie $M$ un punct oarecare pe $BC$ iar $P$ și $Q$ proiecțiile ortogonale ale lui $M$ pe $AB$, respectiv $AC$.

a) Arătați că suma $MP + MQ$, nu depinde de poziția lui $M$.

b) $D$ fiind mijlocul segmentului $BC$, arătați că $DP = DQ$ și că patrulaterul $APDQ$ este inscriptibil.

c) Precizați poziția lui $M$ pentru care suma $DP + DQ$ este minimă, iar produsul $MP \cdot MQ$ este maxim.

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița, Suceava)*

**VII.G.93.** Într-un dreptunghi $ABCD$ în care $AB = a$, $BC = b$, $a < b$ se înscrie un alt dreptunghi $A'B'C'D'$ cu $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ respectiv pe segmentele $AD$, $AB$, $BC$, $CD$, cunoscîndu-se raportul $\frac{A'B'}{B'C'} = k > 0$. Calculați lungimile laturilor dreptunghiului $A'B'C'D'$ în funcție de $a$, $b$, $k$ și precizați condițiile satisfăcute de $k$ pentru care există dreptunghiul $A'B'C'D'$.

*(Acad. N. Teodorescu, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VII.G.94.** Într-un cerc $\mathcal{C}$ cu centrul $O$ și raza $R$ fie o coardă fixă $AB$. Arătați că:

a) oricare ar fi coarda $CD$ perpendiculară pe $AB$ într-un punct interior segmentului $AB$, este îndeplinită relația: $AB + CD \geqslant 2R$;

b) mijloacele coardelor de lungime $2R - AB$ se află pe un cerc, avînd centrul în $O$. În cazul în care $AB > R$, deduceți că există puncte $A'$, $B'$ pe coarda $AB$ astfel încît orice coardă $FG$ a cercului $\mathcal{C}$ care intersectează segmentul $A'B'$ satisface relația: $AB + FG \geqslant 2R$.

*(* * *, etapa republicană, 1983, Pitești)*

**VII.G.95.** Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, iar $S$ este aria patrulaterului. Arătați că:

$$S \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

## INDICAȚII

**VII.G.1.** a) Folosim proprietatea medianei corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic și teorema unghiului exterior.

**VII.G.2.** Folosim teoremele cunoscute pentru linia mijlocie și triunghiul isoscel.

**VII.G.3.** Remarcăm linii mijlocii în triunghiul $ABC$ și mediane în triunghiuri dreptunghice. Cele trei triunghiuri au laturile respectiv congruente.

**VII.G.4.** Este bine să ne bazăm pe simetria figurii. Remarcăm segmente și unghiuri congruente.

**VII.G.5.** Atenție! Punctul $D$ care îndeplinește condiția cerută în problemă poate fi situat pe dreapta $BC$ în interiorul sau exteriorul segmentului $BC$. Problema admite, deci, mai multe soluții.

Urmărim apoi, în fiecare situație, unghiurile triunghiurilor isoscele formate. Sînt utile notații auxiliare pentru prescurtarea scrierii.

**VII.G.6.** Folosim paralelogramele $ADBB'$, $A'DC'C$.

**VII.G.7.**

a) Dreapta $AD$, $(D \in BC)$ este axă de simetrie a triunghiului $ABC$ $\langle = \rangle$ oricare ar fi $P \in AB \cup BD$, simetricul său față de dreapta $AD$, $P' \in AC \cup CD$.

O implicație se arată ușor pe baza acestei definiții.

Pentru a arăta că dacă dreapta $AD$ $(D \in BC)$ este axă de simetrie a triunghiului $ABC$, atunci $AB = AC$ și $AD \perp BC$, folosim raționamentul prin reducere la absurd sau arătăm că simetricul unui segment față de o dreaptă este un segment care face cu dreapta un unghi congruent cu unghiul făcut de segmentul dat cu dreapta.

b) Folosim afirmația de la a) după ce arătăm că o axă de simetrie a triunghiului trece neapărat printr-un vîrf al său și taie latura opusă.

**VII.G.8.** Patrulaterul $AMA'N$ este inscriptibil dacă și numai dacă $m(\widehat{MAN}) + m(\widehat{MA'N}) = 180°$.

**VII.G.9.** Toate informațiile necesare le avem în fig. VII.G.9.

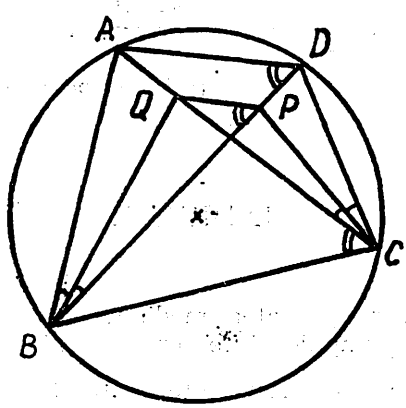



*Fig. VII. G. 9*

**VII.G.10.** Folosim teoreme referitoare la măsura unui unghi înscris în cerc și măsura unui unghi cu vîrful în interiorul cercului.

**VII.G.11.** Observăm triunghiuri congruente. Patrulaterul $AEDF$ este inscriptibil.

**VII.G.12.** Obținem patrulatere inscriptibile construind $AO$, unde $O$ este intersecția diagonalelor $BD$ și $EC$.

**VII.G.13.** Arătăm că dreptele $EN$ și $FP$ sînt perpendiculare și apoi că sînt mediatoarele segmentelor $PM$, respectiv $NQ$.

**VII.G.14.**

a) $E$ este ortocentrul triunghiului $AMN$.

b) Arătăm că punctele $A, M, E', N$ sînt conciclice observînd unghiuri congruente.

c) Centrul cercului circunscris triunghiului $AMN$ este egal depărtat de $A$ și $E'$.

**VII.G.15.** Arătăm că patrulaterele $AFCM$, $AMBE$, $BMCD$ au diagonalele perpendiculare. Apoi, folosind patrulatere inscriptibile, arătăm că $AD$, $BF$, $CE$ sînt bisectoarele triunghiului ortic al triunghiului $ABC$.

**VII.G.16.**

a) Remarcăm că două triunghiuri sînt congruente. Folosind unghiurile congruente care apar, punem în evidență patrulatere inscriptibile.

b) Avem de arătat că $AH \perp CF$. Evaluăm unghiul $AHC$.

**VII.G.17.**

a) Exprimăm suma $MP + MQ$ în funcție de lungimile segmentelor fixe ale figurii; $APMQ$ este dreptunghi, iar triunghiul $BPM$ este isoscel.

b) Punctele $A, P, M, Q, D$ sînt conciclice pe cercul de diametru $PQ$.

**VII.G.18.**

a) Observăm că triunghiurile $AOD$ și $BOC$ sînt isoscele.

b) Cercurile circumscrise triunghiurilor $AOM$ și $BOM$ sînt congruente.

c) Din a) și b) rezultă că $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BMD}$.

d) Dreapta $OM$ este perpendiculară pe $AD$ și $BC$.

**VII.G.19.** Folosim unghiurile patrulaterelor inscriptibile formate și punem în evidență un alt patrulater inscriptibil. (Sînt mai multe posibilități de a așeza punctele figurii).

**VII.G.20.** Fie $N$ punctul diametral opus lui $A$ în cercul $O$. Arătăm că triunghiul format de dreptele $AB'$, $AN$, $B'C'$ are suma măsurilor a două unghiuri egală cu $90°$, deci al treilea unghi este drept. (Dreapta $AO$ poate fi interioară sau exterioară unghiului $BAC$).

**VII.G.21.** Atenție la poziția punctelor $M$ și $N$. Avem două posibilități.

a) Arătăm că $B$ este ortocentrul triunghiului $ACD$.

b) Folosim teorema medianei corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic și faptul că punctele $M, N, C, D$ sînt conciclice. Calculăm măsura unghiului $AMP$ (sau $BMP$).

**VII.G.22.** Analizăm separat situațiile cînd triunghiul este ascuțitunghic, obtuzunghic sau dreptunghic.

Remarcăm, în fiecare caz, unghiuri congruente formate în patrulatere inscriptibile, unghiuri formate de dreptele paralele și unghiuri complementare.

**VII.G.23.**

a) Construim proiecțiile centrului cercului înscris în triunghiul $ABC$ pe laturile triunghiului și folosim proprietatea tangentelor duse dintr-un punct exterior la cerc.

b) Aplicăm un raționament similar punctului a).

**VII.G.24.** Calculăm măsurile unghiurilor formate de bisectoarele care apar în figură.

Altfel : Folosim faptul că centrele cercurilor tangente la 2 drepte concurente se găsesc pe două drepte perpendiculare care sînt bisectoarele unghiurilor formate de cele două drepte.

**VII.G.25.** Analizăm situațiile cînd triunghiul $ABC$ este ascuțitunghic, obtuzunghic sau dreptunghic. Calculăm măsurile unghiurilor $BHC$, $BIC$, $BOC$. Apoi arătăm că punctele $B$, $O$ și $C$ sînt egal depărtate de punctul $N$ de intersecție al bisectoarei $AI$ cu cercul $(O)$.

**VII.G.26.** Arătăm că triunghiul $AOH$ este isoscel și apoi că triunghiul $AHC'$ are latura $AC'$ de lungime $AC' = \frac{1}{2} AC$. ($C'$ este proiecția lui $C$ pe $AB$).

**VII.G.27.** Construim perpendiculara din $P$ pe dreapta $OA$. Această perpendiculară intersectează cercul în $N$. Arătăm că punctele $N$, $A$, $Q$ sînt coliniare.

**VII.G.28.** Triunghiurile $ADN$ și $MDB$ sînt asemenea.

**VII.G.29.** Cu lungimile segmentelor $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ se poate forma o proporție. Rezultă triunghiuri asemenea.

**VII.G.30.** Alegem, dintre grupele de triunghiuri asemenea ale figurii, pe cele ce conțin $BQ$ și respectiv $CP$ ca laturi.

**VII.G.31.**

a), b) Observați că dreapta $BD$ este axă de simetrie a patrulaterului $ADA'B$.

c) Căutați triunghiuri asemenea. Dacă nu le găsiți cu ajutorul ipotezei și punctelor anterioare, o sugestie vă poate da chiar relația de demonstrat.

**VII.G.32.**

a) Triunghiurile $CDP$ și $ABD$ sînt asemenea, cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

b) Triunghiurile $OCP$ și $OAD$ sînt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

**VII.G.33.** Remarcăm că figura admite dreapta $AD$ ca axă de simetrie. Folosim triunghiurile congruente care apar şi triunghiurile asemenea avînd raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

**VII.G.34.**

a) Aplicăm teorema lui Thales.

b) Remarcăm triunghiuri asemenea, scriem şirul rapoartelor egale şi formăm proporţii derivate din care determinăm $MN$.

**VII.G.35.** Remarcăm triunghiuri asemenea şi segmente proporţionale. Aplicăm pentru aceasta teorema fundamentală a asemănării şi teorema lui Thales.

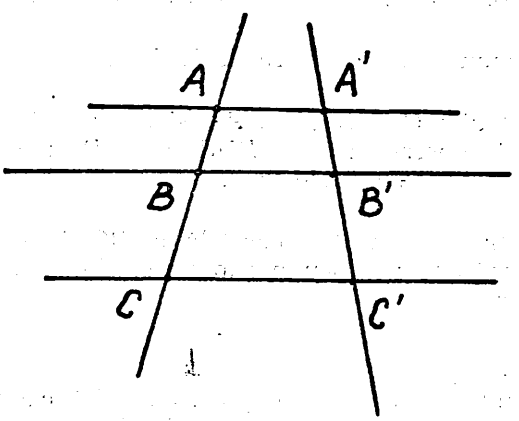



*Fig.VII.G.35.*

Teorema lui Thales poate fi formulată, într-un cadru mai general, astfel :

Un fascicul de drepte paralele determină pe orice două secante segmente proporţionale. Cu notaţiile din figura VII.G.35. avem :

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

**VII.G.36.** Folosim teorema fundamentală a asemănării şi reciproca teoremei lui Thales. Construim, eventual, o paralelă la $AB$ dusă prin punctul de intersecţie a diagonalelor.

**VII.G.37.** Apar mai multe perechi de triunghiuri asemenea. Dintre acestea trebuie să le alegem pe cele ce implică relaţia cerută, deci triunghiuri care au segmentele $AB$, $AD$, $BC$ ca laturi.

**VII.G.38.** Punctul $O$ este interior cercului circumscris patrulaterului $ABCD$. Scriem puterea lui $O$ față de acest cerc ; observăm triunghiuri asemenea.

**VII.G.39.**

a) Două vîrfuri opuse ale patrulaterului $EFGH$ se găsesc pe mediatoarea comună a bazelor trapezului.

b) Exprimăm suma măsurilor unghiurilor opuse ale patrulaterului $EFGH$ în funcție de măsurile unghiurilor lui $ABCD$. Observăm că nu este necesar ca patrulaterul $ABCD$ să fie inscriptibil.

**VII.G.40.**

a) Remarcăm următoarele perechi de triunghiuri congruente : $\triangle BDP \equiv \triangle CDP$ ; $\triangle BB'C \equiv \triangle CC'B$ ; $\triangle C'BD \equiv \triangle B'CD$.

b) Semidreapta $DA$ este bisectoarea unui unghi într-un triunghi isoscel.

c) Construim prin $D$ o paralelă la $BB'$.

**VII.G.41.** Construim $CP \parallel BF$, $P \in AD$ și aplicăm teorema lui Thales în triunghiul $APC$ ; observăm că $\triangle BDE \backsim \triangle CDP$ ; punem în evidență în proporțiile obținute, rapoartele date.

**VII.G.42.** Construim prin $A$ o paralelă la $BC$. Folosim teorema fundamentală a asemănării ; înlocuim rapoartele date cu altele, egale, avînd același numitor.

**VII.G.43.**

a) Folosind relația dată în ipoteză rezultă catetele celor două triunghiuri respectiv congruente. Apar două triunghiuri asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

b) Folosim unghiurile triunghiurilor de la a).

c) Remarcăm că $PM$ este linie mijlocie în triunghiul $ABN$.

d) Folosim a) și b).

**VII.G.44.** Considerăm cazul în care triunghiul $ABC$ este ascuțitunghic. Avem de arătat că $C'B'ED$ este inscriptibil $\langle = \rangle$ $AB = AC$, deci două teoreme. Pentru a o demonstra pe prima folosim două patrulatere inscriptibile și teorema lui Thales ; pentru a o demonstra pe cealaltă arătăm că patrulaterul $C'B'ED$ este trapez isoscel.

Dacă triunghiul $ABC$ este obtuzunghic, se demonstrează analog.

**VII.G.45.** Folosim faptul că măsura unghiului format de o coardă cu tangenta la cerc este jumătate din măsura arcului subîntins. Pe de altă parte, observăm unghiuri exterioare unor triunghiuri și patrulatere inscriptibile.

**VII.G.46.**

a) Folosim unghiuri înscrise în semicercuri.

b) Observăm patrulatere inscriptibile și unghiuri opuse la vîrf.

c) Folosim teorema bisectoarei și reciproca ei ; triunghiurile $ABO_1$ și $ACO_2$ sînt asemenea.

**VII.G.47.**

a) Folosim relația cunoscută între viteza unui mobil ($v$), spațiul parcurs ($s$) și intervalul de timp consumat ($t$) : $t = \frac{s}{v}$.

b) Dificultatea constă în a transpune problema din limbajul fizic în cel geometric. Identificăm cele două mobile $M_1$ și $M_2$ prin două puncte : $M_1 \in AB$, $M_2 \in AD$. Arătăm că dreapta $M_1M_2$ se deplasează astfel încît rămîne paralelă cu dreapta $DE$, unde $E$ este mijlocul segmentului $AB$. Apoi, cînd $M_1$ descrie segmentul $EB$, $M_2$ descrie segmentul $DC$ ș.a.m.d.

**VII.G.48.** Metoda 1. Prelungim $AC$ cu un segment congruent cu $CE$.

Metoda 2. Construim paralelograme avînd laturile de lungimi $LK$, $LB$.

Metoda 3. Notăm $k = \frac{CE}{EB}$ și $t = \frac{C'L}{CC'}$, unde $C'$ este proiecția lui $C$ pe $AB$. Căutăm relația dintre $k$ și $t$, apoi exprimăm $LK$ și $LB$ în funcție de $k$.

**VII.G.49.** Folosim teorema : Într-un trapez, mijloacele bazelor, punctul de intersecție a laturilor neparalele și punctul de intersecție a diagonalelor sînt patru puncte coliniare.

**VII.G.50.** Dacă $m(\widehat{BAC}) = 90°$, atunci $AEPF$ este dreptunghi. Folosim teorema medianei corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic.

Dacă $EF \parallel BC$, rezultă, cu teorema fundamentală a asemănării că $AM$ trece prin mijlocul segmentului $EF$. Observăm apoi că punctele $A$, $E$, $P$, $F$ sînt conciclice pe cercul de diametru $AP$, deci $EF$ sau este o coardă perpendiculară pe acest diametru, sau este alt diametru al cercului.

**VII.G.51.**

a) Observăm unghiuri înscrise în semicercuri.

b) Putem aborda problema în mai multe moduri :

1. Arătăm că mediatoarele segmentelor $AN$, $AM$, $AP$ sînt concurente, deci există un punct egal depărtat de $A$, $M$, $P$, $N$.

2. Arătăm că triunghiurile $ANB$ și $MAB$ sînt asemenea, apoi că triunghiurile $NBP$ și $PBM$ sînt asemenea și, în final, că unghiurile $ANP$ și $AMP$ sînt suplementare.

3. Dacă $F$ este intersecția dreptelor $CN$ și $DM$, arătăm că punctele $A$, $N$, $P$, $F$, $M$ se găsesc pe același cerc.

**VII.G.52.** Observăm triunghiuri congruente și triunghiuri asemenea. Aplicăm teorema lui Pitagora.

**VII.G.53.** Folosim triunghiurile asemenea care apar în figură. Apoi aplicăm teorema lui Pitagora.

**VII.G.54.** Aducem relația la o formă mai simplă, ținînd cont că numitorul este nenul.

**VII.G.55.** Aducem expresia la o formă mai simplă. Ținem cont de faptul că $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Atenție la simplificări.

**VII.G.56.**

a) Determinăm $DE$ și $AF$ remarcînd triunghiuri asemenea. Aplicăm apoi teorema lui Pitagora.

**VII.G.57.** Construim un triunghi dreptunghic ce are $EF$ ca ipotenuză. Altfel, aplicăm teorema medianei.

**VII.G.58.** Fie $AB$, $AD$ și $CD$ laturile congruente ale patrulaterului și $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Triunghiul $ADC$ este echilateral.

**VII.G.59.**

a) Aplicăm teorema lui Pitagora și reciproca ei.

b) Aplicăm reciproca teoremei bisectoarei.

**VII.G.60.** Trebuie să observăm că triunghiul $ABC$ este dreptunghic!

**VII.G.61.** Construim proiecția lui $C$ pe dreapta $AB$; exprimăm lungimile laturilor triunghiului $AMN$ în funcție de $AB$.

**VII.G.62.** Calculăm lungimea laturii pătratului în funcție de $a$ aplicînd teorema lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic; remarcăm triunghiuri asemenea.

**VII.G.63.** Construim, din centrul cercului circumscris trapezului, perpendiculare pe diagonale; se formează un pătrat cu diagonala $3\sqrt{2}$ cm.

**VII.G.64.** Prelungim segmentul $MP$ cu un segment $MQ$ congruent cu $MP$. Patrulaterul $BQCP$ este paralelogram.

**VII.G.65.** Sînt posibile mai multe situații.

a) Fie $E$ diametral opus lui $A$ în cercul circumscris triunghiului $ABC$. Unghiurile $BAA'$ și $CAE$ au complemente congruente.

b) Cele trei puncte aparțin diagonalei unui paralelogram.

c) Folosim b) și aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate.

**VII.G.66.** Comparăm aria triunghiului $AOB$ cu ariile celorlalte triunghiuri formate de diagonalele și laturile paralelogramului.

**VII.G.67.** Apar două triunghiuri echilaterale.

**VII.G.68.** Dacă într-un triunghi cunoaștem lungimile laturilor, atunci putem să calculăm o înălțime rezolvînd un sistem de ecuații.

**VII.G.69.** Folosim proprietatea tangentelor duse dintr-un punct exterior la un cerc.

**VII.G.70.** Construim din $D$ și $E$ perpendicularele pe $AB$, respectiv $AC$. Exprimăm în două moduri ariile triunghiurilor formate. Remarcăm segmente proporționale din triunghiuri asemenea.

**VII.G.71.** Folosim proprietatea medianei unui triunghi de a împărți acel triunghi în două triunghiuri echivalente (de arii egale).

**VII.G.72.** Proiectăm $D$ și $F$ pe laturile triunghiului $ABC$. Remarcînd patrulatere inscriptibile, obținem două triunghiuri asemenea. Pe de altă parte, folosim faptul că mediana unui triunghi împarte acel triunghi în două triunghiuri echivalente.

**VII.G.73.**

a) Construim prin $D$ și $C$ paralele la laturile neparalele ale trapezului și din triunghiurile formate determinăm respectiv cos $A$ și cos $B$, folosind teorema cosinusului.

b) Fie $O$ intersecția diagonalelor ; arătăm că triunghiul $AOD$ este isoscel.

**VII.G.74.**

a) Avem $m(\widehat{BAD}) = 30°$.

b) Folosim teorema lui Pitagora.

Altfel : Fie $r$ raza cercului înscris într-un triunghi, $S$ aria și $p$ semiperimetrul triunghiului. Avem relația $r = \frac{S}{p}$.

**VII.G.75.** Notăm cu $x$ lungimea razei cercului. Calculăm $x$ dintr-o ecuație obținută aplicînd teorema lui Pitagora în două triunghiuri dreptunghice.

**VII.G.76.**

a) Proiectăm punctul $O$ pe diagonalele patrulaterului. Este util, pentru claritatea scrierii, să notăm cu $x$ și $y$ lungimile laturilor dreptunghiului format.

b) Folosim rezultatul de la a).

Altfel : Fie $E$ proiecția lui $O$ pe $CD$. Construim un triunghi în care $OE$ este linie mijlocie.

**VII.G.77.**

a) Considerăm mijlocul segmentului $OC$, care determină cu $P$, $O$, $N$ un paralelogram.

b) Două din laturile triunghiului $NPQ$ sînt mediane în triunghiuri dreptunghice. Arătăm că triunghiul $NPQ$ este dreptunghic isoscel.

c) Apar două triunghiuri asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$.

d) Notăm cu $l$ lungimea laturii pătratului $ABCD$. Calculăm $EQ$ și $LE$ în funcție de $l$.

e) Cele două triunghiuri au cîte un unghi de 45°. Alte două unghiuri congruente rezultă remarcînd că triunghiurile $AOF$ și $AMG$ sînt asemenea.

**VII.G.78.** Fie $O$ centrul cercului. Problema admite două soluții după cum punctele $B$ și $C$ sînt de aceeași parte sau de o parte și de cealaltă a dreptei $AO$. Se utilizează faptul că $\sqrt{2}$ este latura pătratului înscris în cercul de rază 1 și $\sqrt{3}$ este latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază 1.

**VII.G.79.** Arătăm că triunghiul format de centrele de greutate ale celor trei triunghiuri este asemenea cu triunghiul $ABC$.

**VII.G.80.**

a) Verificăm inegalități de forma: $|b-c| < a < b+c$, exprimînd numerele $a$, $b$, $c$ în funcție de valoarea comună a rapoartelor de proporționalitate.

**VII.G.81.** Numerele $a$, $b$, $c$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi dacă și numai dacă $|b-c| < a < b+c$.

Pentru a calcula unghiurile triunghiului, cercetăm suma pătratelor a două dintre numere.

**VII.G.82.** Atenție ! Există două posibilități.

Aplicăm teorema bisectoarei. Triunghiul există dacă $|AC-BC| < AB < AC+BC$.

**VII.G.83.** Punem în evidență un pătrat perfect.

Folosim inegalități în triunghiurile formate.

**VII.G.84.** Observăm că $DM$ și $DN$ sînt mediane în triunghiuri dreptunghice. Folosim inegalitatea: $x^2+y^2 \geqslant 2xy$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

**VII.G.85.** Folosim inegalitatea mediilor. Proiectăm punctul $O$ pe coardele $AB$ și $CD$; exprimăm lungimile $AB$ și $CD$ folosind teorema lui Pitagora.

**VII.G.86.**

a) Ducem prin $D$ o paralelă la $AC$ şi aplicăm teorema înălţimii.

b) Folosim punctul a) şi aplicăm inegalitatea mediilor.

c) Remarcăm triunghiuri asemenea şi aplicăm teorema înălţimii.

**VII.G.87.** Deoarece media geometrică este mai mică sau cel mult egală cu media aritmetică, avem :

$$DE = \sqrt{AE \cdot EB} \leqslant \frac{1}{2}(AE + EB) = \frac{AB}{2};$$

egalitatea are loc dacă $AE = EB$.

**VII.G.88.**

a) Unghiurile $EFC$ şi $CEF$ sînt congruente avînd complemente congruente.

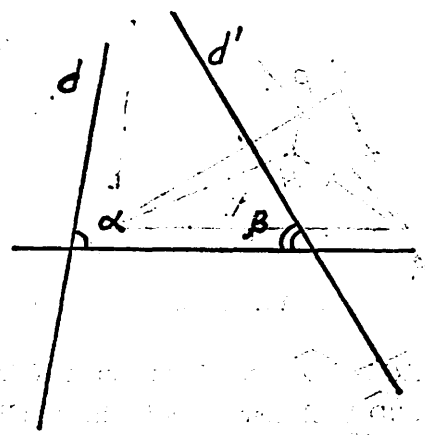
b) Pentru a calcula $AD$, exprimăm aria triunghiului $ABC$ în două moduri. Pentru a calcula $FC$, folosim teorema bisectoarei.

c), d) Folosim teorema catetei.

**VII.G.89.**

a) Dacă o secantă face cu dreptele $d$ şi $d'$ unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei cu suma măsurilor mai mică de 180°, atunci $d$ şi $d'$ sînt concurente.

b) Dacă un triunghi are un unghi drept, celelalte unghiuri sînt ascuţite.




$\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow d \cap d' \neq \phi$

*Fig. VII.G.89.*

**VII.G.90.** Scriem relația dată într-o formă mai convenabilă, care să sugereze triunghiuri asemenea.

Putem în evidență segmentul de lungime $2 \cdot MC$. Pentru aceasta, construim $C'$, simetricul lui $C$ față de $M$.

**VII.G.91.** Metoda 1. Prelungim medianele dincolo de $E$ și $F$ cu segmente respectiv congruente cu ele.

Metoda 2. Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

Comparăm $BG$ cu $CG$. Pentru aceasta, construim mediana laturii $BC$ și aplicăm :

Teorema articulației :

Fie $ABC$ și $DEF$ două triunghiuri astfel încît : $AB = DE$, $AC = DF$. Atunci $\widehat{BAC} > \widehat{EDF} \langle = \rangle BC > EF$.

Demonstrația teoremei :

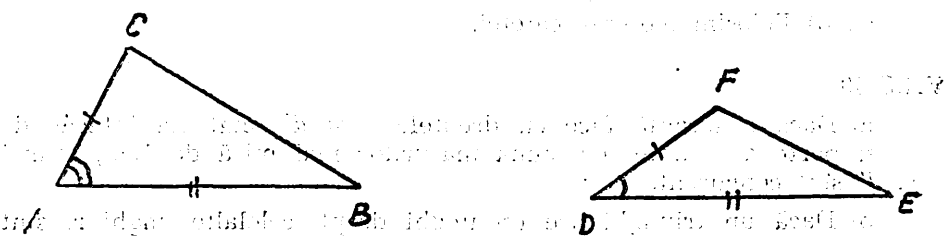



*Fig. VII.G.91.a.*

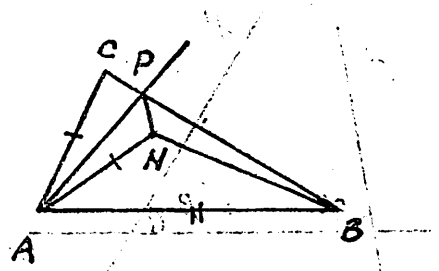



*Fig. VII.G.91.b.*

„$=\rangle$". Deoarece $\widehat{BAC} > \widehat{EDF}$ există un punct $N$ interior unghiului $BAC$ astfel încît $\widehat{NAB} \equiv \widehat{EDF}$. Alegem $N$ astfel încît $AN = DF$ ; $N$ poate fi interior triunghiului $ABC$, exterior lui, sau pe latura $BC$ (v. fig. VII.G.91., a, b, c, d). În fiecare din aceste cazuri rezultă că :

$\triangle ABN \equiv \triangle DEF$ (L.U.L.). (1)

Triunghiul $ACN$ este isoscel. Fie $AP$, $P \in BC$, bisectoarea unghiului $CAN$. Rezultă că $\triangle CAP \equiv \triangle NAP$ (L.U.L.).

Deci $CP = NP$. (2)

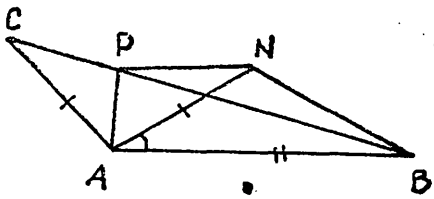


*Fig. VII.G.91.c.*

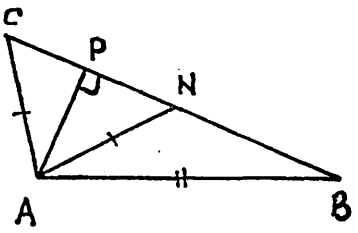


*Fig. VII.G.91.d.*

Dar, în triunghiul $BNP$, $BN < NP + BP$.

Folosind (2), rezultă $BN < CP + BP \equiv BC$.

Cum $BN = EF$ (conform (1)), rezultă în final : $BC > EF$.

„$\Leftarrow$". Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că $\widehat{BAC} \leqslant \widehat{EDF}$. Rezultă că $BC \leqslant DF$. (3)

Dar, conform ipotezei, $BC > DF$. (4)

Afirmațiile (3) și (4) sînt contradictorii ; rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci $\widehat{BAC} > \widehat{EDF}$.

**VII.G.92.**

a) Suma reprezintă lungimea unei catete.

b) Observăm două triunghiuri congruente. Unghiurile drepte din figură ne indică două patrulatere inscriptibile.

c) Folosim faptul că distanța de la un punct la o dreaptă (care se obține construind perpendiculara din punct pe dreaptă) este mai scurtă decît lungimea oricărui segment (oblic) care unește punctul cu dreapta.

**VII.G.93.** Pentru simplificarea scrierii, notăm $AA' = x$, $AB' = y$. Determinăm $x$ și $y$ observînd triunghiuri asemenea. Dreptunghiul $A'B'C'D'$ există dacă $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

**VII.G.94.** Este util să cunoașteți următoarele teoreme de inegalități în cerc:

T 1. Într-un cerc, diametrul este cea mai mare coardă.

T 2. Două coarde ale unui cerc sînt congruente dacă și numai dacă sînt egal depărtate de centrul cercului.

T 3. Dintre două coarde necongruente ale unui cerc este mai lungă cea care este mai apropiată de centrul cercului și reciproc.

a) Proiectăm punctul $O$ pe coradele $AB$, respectiv $CD$.

b) Coardele de lungime $2R - AB$ au lungime constantă. Pentru a arăta că *există* puncte $A'$, $B'$ care îndeplinesc o anumită condiție, trebuie să găsim sau *să construim* aceele puncte.

**VII.G.95.** Exprimăm $S$ ca sumă a ariilor celor două triunghiuri care se formează ducînd una din diagonale.

Aria unui triunghi este cel mult egală cu semiprodusul laturilor.

Folosim inegalitatea : $xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4}$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

# CLASA A VIII-A

## SUBIECTELE DATE LA ETAPA REPUBLICANĂ *

**BUCUREȘTI, 1980**

1. VIII.A.53 ; 2. VIII.A.82 ; 3. VIII.G.28 ; 4. VIII.G.32

**PITEȘTI, 1983**

1. VIII.A.83 ; 2. VIII.A.54 ; 3. VIII.G.29 ; 4. VIII.G.20

**DEVA, 1984**

1. VIII.A.55 ; 2. VIII.A.84 ; 3. VIII.G.26 ; 4. VIII.G.5

**TULCEA, 1985**

1. VIII.A.85 ; 2. VIII.A.56 ; 3. VIII.G.27

**RÎMNICU-VÎLCEA, 1986**

**Algebră**

1. VIII.A.11 ; 2. VIII.A.86 ; 3. VIII.A.10 ; 4. VIII.A.57

**Geometrie**

1. VIII.G.22 ; 2. VIII.G.12 ; 3. VIII.G.15 ; 4. VIII.G.8

**BACĂU, 1987**

**Algebră**

1. VIII.A.87 ; 2. VIII.A.58 ; 3. VIII.A.88 ; 4. VIII.A.12

**Geometrie**

1. VIII.G.30 ; 2. VIII.G.24 ; 3. VIII.G.21 ; 4. VIII.G.13

**BRAȘOV, 1988**

**Algebră**

1. VIII.A.90 ; 2. VIII.A.89 ; 3. VIII.A.59 ; 4. VIII.A.13

**Geometrie**

1. VIII.G.10 2. VIII.G.14 ; 3. VIII.G.11 ; 4. VIII.G.19

**BAIA MARE, 1989**

**Algebră**

1. VIII.A.14 ; 2. VIII.A.91 ; 3. VIII.A.15 ; 4. VIII.A.92

**Geometrie**

1. VIII.G.16 ; 2. VIII.G.31 ; 3. VIII.G.34 ; 4. VIII.G.33

---

* Se indică numai numărul de ordine al problemei al cărui text se găsește la ENUNȚURI.

# ALGEBRĂ

## CAPITOLUL I

## INEGALITĂȚI

**VIII.A.1.** Dacă $a \geq 0$, $b > 0$, $c \geq 0$, atunci : $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(a+c) \geq 6abc$.

*(Etapa județeană, 1987, Maramureș)*

**VIII.A.2.** Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a > b > c$, atunci :

$$\frac{a^3 + a^2b + a^2c - b^3 - c^3 - ab^2 - ac^2}{6} \geq \frac{abc}{3} + \frac{bc^2 + b^2c}{2}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Buzău)*

**VIII.A.3.** Arătați că dacă numerele $x$, $y$, $z$ satisfac relația $x + 2y + 5z = \sqrt{3}$, atunci $4y^2 + 25z^2 \geq 1 - x^2$.

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.4.** Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că cel puțin unul din numerele reale $a(1-b)$ și $b(1-a)$ nu este mai mare decît $\frac{1}{4}$, știind că $a, b \in (0, 1)$.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VIII.A.5.** Să se arate că :

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{7} + \frac{\sqrt{7}}{8} + \frac{\sqrt{8}}{9} + \frac{\sqrt{10}}{11} + \frac{\sqrt{11}}{12} < 5.$$

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VIII.A.6.** Fie :

$$s = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{1\,000^2}.$$

Să se arate că $0{,}099 < s < 0{,}111$.

*(Etapa județeană, 1988, Vaslui)*

**VIII.A.7.** Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbf{R}_+$ are loc inegalitatea :

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VIII.A.8.** Demonstrați că pentru orice $p \in \mathbf{R}_+$ avem :

$$p + p^2 + p^3 + \ldots + p^n - n \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3} - \ldots - \frac{1}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.9.** Se consideră fracția :

$$F(a, b) = \frac{a^8 + 2a^7b + a^6b^2 - a^2b^6 - 2ab^7 - b^8}{a^5 + 2a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 - 2ab^4 - b^5}.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se arate că $F(a, b) \geqslant \frac{1}{4}$, dacă $a + b = 1$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

*(Etapa județeană, 1987, Brăila)*

**VIII.A.10.** Fie $x, y, z, u, v, w$ numere reale nenule care verifică condițiile :

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1 \text{ și } \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0.$$

a) Să se arate că $\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} + \frac{z^2}{w^2} = 1$.

b) Folosind, eventual, punctul a), să se arate că :

$$\frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} \geqslant 9.$$

*(V. Brânzănescu, N. Păuna, etapa republicană, Rîmnicu-Vîlcea)*

**VIII.A.11.** Să se determine numerele reale $a$ astfel încît, oricare ar fi $x, y \in \mathbf{R}$, să aibă loc inegalitatea :

$$2a(x^2 + y^2) + 4axy - y^2 - 2xy - 2x + 1 \geqslant 0.$$

*(I. Mitrache, etapa republicană, 1986, Rîmnicu-Vîlcea)*

**VIII.A.12.** Fie $a, b, c$ numere naturale distincte și mai mari sau cel puțin egale cu 2. Să se arate că :

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.13.** Fie $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$. Să se arate că :

a) $x + y \leqslant 1 + xy$ și $xy + yz + zx \geqslant -3 + 2(x + y + z)$.

b) $xyz \geqslant -1 + \frac{1}{4}(1 + x)(1 + y)(1 + z)$ ; în ce caz avem egalitate ?

*(O. Stănășilă, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VIII.A.14.** Să se arate că pentru orice număr natural $n \geqslant 10$ are loc inegalitatea : $\frac{4}{3} n^3 > (n+1)^3$.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VIII.A.15.**

a) Să se determine numărul real cel mai mic $a$ astfel încît, pentru orice numere reale, $x$, $y$, să avem $(x+y)^2 \leqslant a(x^2+y^2)$.

b) Aceeaşi problemă, astfel încît pentru orice numere reale $x$, $y$, $z$, să rezulte $(x+y+z)^2 \leqslant a(x^2+y^2+z^2)$.

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

## CAPITOLUL II

## FUNCŢII

**VIII.A.16.** Să se arate că nu există funcţii $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aşa încît $f(2-x)+f(x) = -x+2$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

*(Etapa judeţeană, 1987, Tulcea)*

**VIII.A.17.**

a) Se dă funcţia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ pentru care sînt îndeplinite simultan condiţiile :

$P_1$ : $f(x-1) = f(x+1)$, oricare ar fi $x \in \mathbf{N}$ ;

$P_2$ : $1\,987 \cdot f(2) + 7\,891 \cdot f(3) = 1\,987$ ;

$P_3$ : $7\,891 \cdot f(2) + 1\,987 \cdot f(3) = 7\,891$.

1. Aflaţi $f(2)$ şi $f(3)$.

2. Reprezentaţi grafic funcţia $g : \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \to \mathbf{N}$, unde $g(x) = f(x)$.

b) $m$, $n$, $p$ sînt măsurile laturilor unui triunghi. Analizaţi dacă $m^2+n^2+p^2 > 2(mn+mp+np)$.

*(Etapa municipală, 1987, Bucureşti)*

**VIII.A.18.** Funcţia $f : \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}$ verifică relaţia :

$$2f(x) - f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x, \ \forall \ x \in \mathbf{R} - \{-1\}.$$

a) Verificaţi dacă $f(0)+f(1) = 1$.

b) Determinaţi $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

*(Etapa judeţeană, 1987, Călăraşi)*

**VIII.A.19.** Fie funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relațiile :

$$f(x-1) - 4 = 2x - f(2) \text{ și}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 1, \ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

a) Arătați că $f(x) = 2x + 1$ și reprezentați grafic funcțiile $f$ și $g$;

b) Demonstrați că :

$$\left(a + \frac{1}{a} - 2\right) \cdot f(x) + \left(2 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot g(x) \geqslant 0,$$

$$(\forall) x > 2, \ a > 0, \ b > 0.$$

*(Etapa județeană, 1987, Teleorman)*

**VIII.A.20.** Fie funcția $f : \mathbf{R} - \{5\} \to \mathbf{R}$,

$$f(2 - x) = \frac{x^2 + 2x - m}{x + 3}.$$

Determinați parametrul $m$ astfel ca funcția să fie liniară, apoi reprezentați graficul funcției aflate.

*(Etapa județeană, 1987, Sălaj)*

**VIII.A.21.** Știind că $f(x-1) = 3x - 8 - f(1)$, să se stabilească prin care din punctele $A(0 ; -4)$ ; $B(5, 1)$ ; $C(3, 2)$ ; $D(10, 26)$ trece graficul funcției $y = f(x)$, unde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

*(Etapa județeană, 1987, Suceava)*

**VIII.A.22.**

a) Să se determine funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, știind că :

$$f(x+1) + g(x-1) = 2x + 14,$$

$$f(x+1) - g(x-1) = 6x - 18, \ (\forall) x \in \mathbf{R}.$$

b) Reprezentați grafic funcțiile : $f_1, g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = 2x$ ; $g_1(x) = -2x + 8$, apoi aflați coordonatele punctelor de intersecție ale celor două grafice.

*(Etapa județeană, 1987, Maramureș)*

## CAPITOLUL III

## POLINOAME. FRACȚII RAȚIONALE

**VIII.A.23.** Să se determine *c.m.m.m.c* și *c.m.m.d.c* al polinoamelor :

$$P(X) \equiv 4X^3 + 4(a-1)X^2 + (a^2 - 4a)X - a^2,$$

$$Q(X) \equiv 2X^3 + (3a-2)X^2 + (a^2 - 3a)X - a^2,$$

unde $a$ este un parametru real.

*(Etapa județeană, 1987, Caraș-Severin)*

**VIII.A.24.** Fie :

$$P(X) = X^3 - X^2 - (5k + 3)X + 5k + 3,\ k \in \mathbf{N},$$

$$Q(X) = X^3 - (1 + m + n)X^2 + (m + n + mn)X - mn,\ m,\ n \in \mathbf{R}.$$

Găsiți un divizor comun al lui $P(X)$ și $Q(X)$ și arătați că $P(m) \neq 0$, pentru $m \in \mathbf{Z}$ și $m \neq 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Teleorman)*

**VIII.A.25.**

a) Descompuneți în factori :

$$P(x, y, z, t) = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(xy - zt) + t^3.$$

b) Calculați :

$$P(1\,987 ; -1\,987 ; 1\,988 ; -1\,988).$$

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VIII.A.26.** Să se determine restul împărțirii unui polinom de grad mai mare decît doi prin polinomul $Q(X) = X^2 - 5X + 6$, știind că $P(2) = 3$ și $P(3) = 2$.

*(Etapa județeană, 1987, Arad)*

**VIII.A.27.** Să se arate că $P(x) = x^3 + 3x^2 + 26x + 24$ este divizibil cu 6, $(\forall)x \in \mathbf{N}$.

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VIII.A.28.** Cercetați dacă există numere reale $a$ și $b$ astfel încît polinomul $P(X) = 2aX^3 + 2bX^2 + 3X + 5$ să fie divizibil cu $X + 1$, iar suma coeficienților săi să fie număr prim.

*(Etapa județeană, 1987, Argeș)*

**VIII.A.29.** Fie :

$$f = aX^{n+1} + bX^n + 1 ;\ a,\ b \in \mathbf{R} ;\ n \in \mathbf{N}.$$

a) Determinați polinoamele $f$ care să fie divizibile cu $X^2 - 1$.

b) Dintre polinoamele găsite la punctul a) aflați pe acelea care sînt divizibile cu $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Botoșani)*

**VIII.A.30.** Să se determine forma polinoamelor cu coeficienți întregi $P$, $Q$, știind că $P(Q(X)) = Q(P(X)) = X$, apoi să se rezolve în $\mathbf{Z}$ ecuația $P(x) \cdot Q(x) = 3$.

*(Etapa județeană, 1987, Buzău)*

**VIII.A.31.** Fie $P$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali care în $\{-1, 0, 1\}$ iau, respectiv, valorile 1, 2, 3. Se cere :

a) Să se arate că $(\forall)P_1, P_2 \in P$, $P_1 - P_2$ se divide cu $X(X^2 - 1)$.

b) Să se arate că în $P$ există un singur polinom de gradul I și că $P$ nu conține polinoame de gradul II.

*(Etapa județeană, 1987, Dolj)*

**VIII.A.32.** Se dă polinomul $P(X) \equiv X^3 + X^2 + X + 1$. Să se arate că binomul $1\,986X + 1$ divide diferența $P(1\,987X + 1) - P(X)$.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VIII.A.33.** Se dă un polinom $P(X)$ de grad mai mare sau egal cu 2. Știind că suma coeficienților săi de grad par este egală cu 2, iar suma coeficienților de grad impar este egală cu 8, să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $X^2 - 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Cluj)*

**VIII.A.34.** Se dă polinomul :

$$P(X) = X^4 - 1\,986X^3 + 1\,987X^2 - 1\,988X + 1\,986.$$

a) Să se arate că restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $(X - 1\,985)$ este $1\,984^2$.

b) Să se determine $a$ astfel încît restul împărțirii polinomului $P(X) + a$ la $(X - 1\,985)$ să fie egal cu $1\,986^2$.

*(Etapa județeană, 1987, Caraș-Severin)*

**VIII.A.35.** Fie $P$, $Q$, $R$, 3 polinoame astfel încît $X - 1$ divide pe $P^3 + Q^3 + R^3 - 3PQR$ și nu divide pe $P + Q + R$. Să se arate că $P - Q$, $Q - R$, $R - P$ se divid cu $X - 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Hunedoara)*

**VIII.A.36.** Fie polinoamele : $P(X) = X^5 + X + 1$ și $Q(X) = X^5 + X^4 + 1$

a) Să se descompună în factori inductibili

$$P(X) - Q(X) \text{ și } P(X) - XQ(X).$$

b) Să se simplifice fracția $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

c) Să se determine valorile lui $x$, număr natural, pentru care $F(x)$ este număr natural.

*(Etapa județeană, 1987, Iași)*

**VIII.A.37.** Fie $P(X)$ un polinom de grad mai mare decît 2, care se divide cu $X - a$, cîtul fiind $Q(X)$.

a) Să se arate că $P(a) = P(a + 1) - Q(a + 1)$.

b) Să se determine $a$ astfel încît $Q(X)$ să se dividă cu $(X - a - 1)$, dacă $P(X) = a(X - a - 2)^{2n} + 2(X - a)^n - 3$.

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VIII.A.38.** Dacă polinomul $P(X) = X^4 + 4aX^3 + 6bX^2 + 4cX + d$ este divizibil cu polinomul $Q(X) = X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$, atunci primul este un pătrat, iar al doilea este cubul unui binom.

*(Etapa județeană, 1987, Olt)*

**VIII.A.39.** Fie polinomul $P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbf{R}$.

a) Calculați $E(X) = P(X + 1) - P(X - 1)$.

b) Determinați $a$ și $b$ astfel încît $E(X)$ să fie divizibil cu $X^2 - 1$.

c) Demonstrați că puterea a treia a oricărui număr natural este diferența a două pătrate de numere naturale.

*(Etapa județeană, 1987, Prahova)*

**VIII.A.40.** Fie $P(X) \equiv aX^n + bX^m + cX^p$; $Q(X) \equiv bX^n + cX^m + aX^p$ și $R(X) = cX^n + aX^m + bX^p$, unde $a + b + c \neq 0$ și $a, b, c \neq 0$.

Arătați că:

a) $P(X)$, $Q(X)$ și $R(X)$ dau același rest la împărțirea cu $X - 1$.

b) $P(X) + Q(X) - 2R(X)$ se divide cu $X - 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Satu Mare)*

**VIII.A.41.** $P(X)$ este un polinom de grad cel puțin doi, care satisface următoarele condiții:

1. $P(X)$ dă restul 1 la împărțirea cu $X - 1$;

2. $(X - 1) \cdot P(X) + X \cdot P(X + 1) \equiv 2$.

Să se determine restul împărțirii lui $P(X)$ la polinomul $X^2 - 3X + 2$.

*(Etapa județeană, 1987, Vrancea)*

**VII.A.42.** Fie polinoamele $P(X) \equiv X^2 - aX + 3$ și $Q(X) \equiv 2X^3 - (3a - 1)X^2 + bX + c$, cu $a, b, c$ reale.

a) Determinați numerele $a, b, c$, știind că $P(X)$ se divide cu $X - 3$, iar $Q(X)$ se divide cu $P(X)$.

b) Rezolvați ecuația $Q(x) = 2x^2 - 9x + 9$, cu $a, b, c$ determinați la a).

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.43.** Fie polinomul $P(X) = X^2 - 2abX + a^4 + b^4$, $a, b \in \mathbf{R}$. Arătați că:

1. $P(x) \geqslant 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

2. $0 \leqslant \dfrac{(1 - 2ab + a^4 + b^4)(1 + 2ab + a^4 + b^4)}{2(1 + a^4 + b^4)}$.

*(Etapa județeană, 1987, Călărași)*

**VIII.A.44.** Se dă expresia: $E(x) \equiv \dfrac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5}$.

a) Să se scrie expresia $E(x) \equiv \dfrac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5}$ sub forma $E(x) \equiv m + \dfrac{n}{(x-2)^2 + p}$ unde $m, n, p$ sînt constante ce vor fi determinate.

b) Utilizînd scrierea lui $E(x)$ de la punctul precedent, să se arate că $E(x) \in (3; 7]$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

c) Să se determine elementele mulțimii:

$$B \equiv \left\{ x \in \mathbf{N} \mid \frac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5} \in \mathbf{Z} \right\}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Brașov)*

**VIII.A.45.** a) Să se simplifice fracția :

$$F = \frac{x^3 + (b-2a)\cdot x^2 + a(a-2b)\cdot x + a^2b}{x^3 - (b+2a)\cdot x^2 + a\cdot(a+2b)\cdot x - a^2b},$$

unde : $x \neq b$, $x \neq a$ ;

b) Să se afle valoarea fracției cînd $9(x^2 + b^2) \equiv 22bx$.

*(Etapa județeană, 1987, Galați, Gorj)*

**VIII.A.46.** Se consideră fracția :

$$F(X) = \frac{X^{15} + X^9 + X^8 + 2X^7 - X^2 - 2X - 2}{X^9 + 2X^8 + 2X^7 - X^2 - 2X - 2}.$$

a) Să se simfice fracția.

b) Să se arate că $F(x) > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R} - \{1\}$.

*(Etapa județeană, 1987, Arad)*

**VIII.A.47.** Se consideră fracția :

$$F(X) = \frac{X^4 - 6X^3 + nX^2 + mX - 8}{X^3 - 6X^2 + pX - 6}.$$

a) Să se determine $m$, $n$ și $p$ astfel încît $F(X)$ să se simplifice prin $X^2 - 3X + 2$.

b) Să se determine mulțimea : $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \frac{1}{x-4} \cdot F(x) \in \mathbf{Z} \right\}$

*(Etapa județeană, 1987, Bihor)*

**VIII.A.48.** Să se afle valorile întregi ale lui $n$ pentru care :

$$F(n) = \frac{n^3 - n^2 - 48}{n^3 + 5n^2 + 18n + 24} \text{ este număr natural.}$$

*(Etapa județeană, 1987, Vaslui)*

**VIII.A.49.** Se consideră fracția :

$$F(a, b) = \frac{a^8 + 2a^7b + a^6b^2 - a^2b^6 - 2ab^7 - b^8}{a^5 + 2a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 - 2ab^4 - b^5}.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se arate că $F(a, b) \geq \frac{1}{4}$, dacă $a + b = 1$, cu $a \geq 0$, $b > 0$.

*(Etapa județeană, 1987, Brăila, Sibiu)*

**VIII.A.50.** Se consideră fracția : $F(X) = \frac{8X^3 - 6X^2 + 2X + 1}{4X^3 - 6X^2 + 4X - 1}$.

a) Să se aducă fracția la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valorile întregi $x$ pentru care fracția ia valori întregi.

*(Etapa județeană, 1987, Hunedoara)*

**VIII.A.51.** Se dă fracția :

$$E=\frac{2aX^5+3bX^5-4aX^4-6bX^4-162a-243b}{2aX+3bX-6a-9b}.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Pentru ce valori ale lui $x$ se anulează fracția ?

*(Etapa județeană, 1987, Harghita)*

**VIII.A.52.** Să se simplifice fracția : $F(X)=\frac{5X^3-4X^2-11X-2}{3X^3-X^2-8X-4}$.

Să se determine $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $F(x)$ se poate simplifica.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**VIIIA.53.** Să se afle suma coeficienților polinomului : $P(X)=(5X^2-4)^{1975}\cdot(X^3-8)^{1976}\cdot(1-2X)^{101}$.

*(Etapa republicană, 1980, București)*

**VIII.A.54.** Fie polinomul $P(X)=X^{15}+(m-1)X^3-m$, cu $m\in\mathbf{Z}$. Să se arate că $P(2)$ este divizibil cu 7 și să se determine restul împărțirii polinomului $P(X)$ la $(X^2+X+1)^2$.

*(Etapa republicană, 1983, Pitești)*

**VIII.A.55.** Fie $P(X)=(X-1)^6+mX^3+n$, cu $m, n\in\mathbf{R}$. Să se determine $m, n$ astfel încît polinomul dat să fie divizibil cu $X-2$, iar suma coeficienților să fie egală cu 14.

*(Etapa republicană, 1984, Deva)*

**VIII.A.56.** Să se arate că polinomul $P(X)=(X^{1985}+X^{1984}+\ldots+X+1)^2-X^{1985}$ este divizibil cu polinomul $Q(X)=X^{1984}+X^{1983}+\ldots+X+1)$. Generalizare.

*(O. Stănășilă, etapa pe țară, 1985, Tulcea)*

**VIII.A.57.** Să se determine numerele reale $a$ și $b$ astfel încît polinomul $P(X)=aX^{n+2}+bX^{n+1}+X$ să se dividă cu $(X-1)^2$.

*(A. Olaru, etapa pe țară, 1986, Rîmnicu-Vîlcea)*

**VIII.A.58.** Fie polinomul $P(X)=a_0X^{2n}+a_1X^{2n-1}+\ldots+a_{2n-1}X+a_{2n}$, cu coeficienți reali. Fiind date : $b=a_1+a_0+\ldots+a_{2n}$ și $c=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots-a_{2n-1}+a_{2n}$, să se determine restul lui $P(X)$ la împărțirea prin $X^2-1$.

*(C. Timiraș, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.59.** Fie polinomul $P(X)=X^2+40$. Să se demonstreze că dacă $a, b\in\mathbf{N}$, $a>b$, atunci cel puțin unul dintre numerele $P(a)+P(b)$, $P(a)-P(b)$ este diferit de 1 și nu este număr prim.

*(I. Diaconu, etapa pe țară, 1988, Brașov)*

# CAPITOLUL IV

## DIVERSE

**VIII.A.60.** Arătaţi că dacă suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă prin 8 şi 9, atunci suma cuburilor este divizibilă cu 144.

*(Etapa judeţeană, 1987, Gorj)*

**VIII.A.61.** Se consideră expresiile :

$$E_1(x)=\left[(2+2x)\left(\frac{4x^2+21}{2+2x}-6\right)+\frac{8x^2-27}{4x^2+6+9}\right]\cdot\frac{1}{2x-2}$$

şi $E_2(x)\equiv\left[\left(\frac{125x^3+1}{1+5x}-5x-\frac{15x-75x^2}{5x-1}-15x\right)+(5x-1)\right]\cdot\frac{1}{5x-1}$.

Să se determine valorile lui $x$ pentru care $\frac{E_1(x)}{E_2(x)}\geqslant 0$.

*(Etapa judeţeană, 1987, Vaslui)*

**VIII.A.62.** Fie $n\in\mathbf{N}^*$. Arătaţi că :

a) $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})$ ;

b) Fie $f(x)\equiv(x+1)^9+(x+1)^8\cdot x+(x+1)^7\cdot x^2+\ldots+(x+1)\cdot x^8+x^9$ şi $A=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)$.

Arătaţi că $100|A$.

*(Etapa judeţeană, 1987, Iaşi)*

**VIII.A.63.** Fie :

$$E=(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$$

şi $A\equiv\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$.

a) Să se descompună expresia $E$ în factori (fără a efectua ridicările la putere).

b) Să se arate că numărul $A$ este natural.

c) Să se calculeze numărul $p=\frac{-E}{12abc}\cdot A^{-1}$.

d) Să se calculeze suma : $S\equiv 1\cdot p^1+2\cdot p^2+3\cdot p^3+\ldots+100\cdot p^{100}$ pentru $p$ din punctul precedent.

*(Etapa judeţeană, 1987, Bihor)*

**VIII.A.64:**

a) Se dă ecuația $2ax + \sqrt{3} = \sqrt{3}x + a$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{Q}$.

1. Rezolvați ecuația; 2. Scrieți soluția ecuației sub forma $m + n\sqrt{3}$ unde $m \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{Q}$; 3. Poate avea ecuația soluții raționale?

b) Simplificați fracția: $\dfrac{(X^2+X+1)\cdot(X^2+X-1)-3}{X^3+X^2-2X}$.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**VIII.A.65.** Se consideră polinoamele:

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2,$$

$$Q(X) = a(X-1)^4 + b(X-1)^3 + c(X-1)^2 + d(X-1).$$

a) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încît $P$ și $Q$ să aibă aceeași formă canonică.

b) Să se demonstreze că $P(X^2+2X+2)$ se divide cu $(X+1)^4$.

c) Să se determine $x$, $x \in \mathbf{Z}$ astfel încît $\dfrac{3(x-1)^2}{P(x)} \in \mathbf{Z}$.

*(Etapa județeană, 1987, Bistrița-Năsăud)*

**VIII.A.66.**

a) Dacă $x + \dfrac{1}{x} = -2$, calculați valoarea expresiei $E = x^9(x^3+1) + \dfrac{1}{x^9} \cdot \left(\dfrac{1}{x^3}+1\right)$.

b) Să se arate că pentru orice număr natural $n$, numărul $n^3 + 3n^2 + 3n) \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 2) + 1$ este pătrat perfect.

*(Etapa județeană, 1987, Năsăud)*

**VIII.A.67.** Să se descompună în factori:

a) $X^2 \cdot Y^2 + X^4 + Y^4$;

b) $(X + Y + Z)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3$;

c) $X^5 + X + 1$.

*(Etapa județeană, 1987, Brașov)*

**VIII.A.68.** Să se determine $a \in \mathbf{R} - \{0\}$ pentru care există $x$, $y \in \mathbf{R} - \{0\}$ astfel încît $x + \dfrac{1}{y} = y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$. Apoi, pentru cea mai mare valoare a lui $a$ găsită, să se afle $x$ și $y$.

*(Etapa județeană, 1987, Dolj)*

**VIII.69.** Fie $a$, $b$, $c$ lungimile a trei segmente care verifică relația:

$$2a^2 - ab + 4ac - b^2 - bc + 2c^2 = 0.$$

Cercetați dacă $a$, $b$, $c$ pot fi laturile unui triunghi.

*(Etapa județeană, 1987, Giurgiu)*

**VIII.A.70.** Să se rezolve în $\mathbf{N}$ ecuația:

$$-15x^2 + 11xy - 2y^2 = 19.$$

*(Etapa județeană, 1987, Galați)*

**VIII.A.71.** Să se afle cea mai mare valoare și cea mai mică valoare a sumei: $S = x + y$, știind că $4x + 5y = 100$, $x \in \mathbf{N}^*$, $y \in \mathbf{N}^*$.

*(Etapa județeană, 1987, Galați)*

**VIII.A.72.** Rezolvați ecuațiile:

a) $x^{1986} + \frac{1}{x^{1986}} = 2$;

b) $x^{1986} + \frac{1\,986}{x^{1986}} = 1\,987$.

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița)*

**VIII.A.73.** Se consideră numerele naturale $a$, $b$, $c$, $d$, astfel încît $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ și $a + b + c + d = 4$. Să se găsească cea mai mare valoare pe care o poate lua fiecare din numerele $a$, $b$, $c$, $d$.

*(Etapa județeană, 1987, Galați)*

**VIII.A.74.** Să se arate că

$$E(x, y) = x^5 + 3x^4y + 4y^4x - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 12y^5$$

nu are valoarea 33, oricare ar fi $x$, $y$ numere întregi.

*(Etapa județeană, 1987, Ialomița)*

**VIII.A.75.**

a) Dacă $a + b + c = 0$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, oricare ar fi $a$, $b$, $c$ reale.

b) Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{3x + 2} - \sqrt[3]{3x - 5} - 1 = 0,$$ folosind punctul a).

*(Etapa județeană, 1987, Vîlcea)*

**VIII.A.76.** Fie fracția $\frac{2x + 6}{3x - 7}$, $x \in \mathbf{N}$. Pentru ce valori ale lui $x$ fracția se simplifică prin 8?

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VIII.A.77.** Determinați valoarea maximă a expresiei :

$$E = \frac{1\,989x^2 - 3\,978x - 3\,959}{x^2 - 2x - 3},\ x \in \mathbf{N}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Neamț)*

**VIII.A.78.** Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x-1}{n} + \frac{x-2}{n-1} + \frac{x-3}{n-2} + \ldots + \frac{x-n}{1} = n,\ n \in \mathbf{N}.$$

*(Etapa județeană, 1987, Suceava)*

**VIII.A.79.** Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, numărul $p = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$ este produs de numere naturale consecutive.

*(Etapa județeană, 1987, Dîmbovița)*

**VIII.A.80.** Se consideră fracția : $F(X) = \frac{3X^2 - X - 10}{X^2 - 5X + 6}$.

a) Să se simplifice $F(X)$.

b) Să se rezolve inecuația : $F(x) + 2{,}1(6) \leqslant \frac{4}{x-3} - 0{,}(5)$.

c) Să se determine valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $F(x) \in Z$.

*(Etapa județeană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.81.** Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + \frac{y}{1} + \frac{y+1}{2} + \ldots + \frac{y+1\,985}{1\,986} = 1\,987\,; \\ y + \frac{x}{1} + \frac{x+1}{2} + \cdots + \frac{x+n-1}{n} = n+1, \end{cases}$$

$n \in \mathbf{N}^*$, cu necunoscutele $x$ și $y$.

*(Etapa județeană, 1987, Alba)*

**VIII.A.82.** Se consideră fracțiile :

$$F(X, Y) = \frac{\frac{X}{1+X^2} + \frac{Y}{1+Y^2}}{\frac{1-X^2}{1+X^2} + \frac{1-Y^2}{1+Y^2}} \text{ și } G(X, Y) = \frac{\frac{X}{1+X^2} - \frac{Y}{1+Y^2}}{\frac{1-X^2}{1+X^2} + \frac{1-Y^2}{1+Y^2}}.$$

a) Să se aducă fracțiile date la o formă mai simplă.

b) Să se determine toate perechile de numere reale $(x, y)$ pentru care $F(x, y) = G(x, y) = 2$.

*(* * *, etapa republicană, 1980, București)*

**VIII.A.83.** Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y+z-1}{2x-y+z} - \dfrac{1}{x+y+z} + \dfrac{2}{x+y-z} = -\dfrac{5}{4}; \\ \dfrac{1}{x+y-z} - \dfrac{x+y+z-1}{x+y+z} + \dfrac{1}{2x-y+z} = \dfrac{1}{4}; \\ \dfrac{2}{2x-y+z} + \dfrac{4}{z+y+x} + \dfrac{x+y-z+2}{x+y-z} = 5. \end{cases}$$

*(* * *, etapa republicană, 1983. Pitești)*

**VIII.A.84.** Fie $E(x, y) = (x+y)^5 - x^5 - y^5$.

a) Să se descompună în factori $E(x, y)$.

b) Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{Z}$, atunci $E$ este divizibilă cu 15.

*(Etapa republicană, 1984, Deva)*

**VIII.A.85.** Să se determine valorile lui $k \in \mathbf{Z}$, astfel încît $k^2 + k - 2$ să fie divizibil cu $2k + 1$.

*(C. Hărăbor, I. Diaconu, etapa republicană, 1985. Tulcea)*

**VIII.A.86.** Să se afle numerele naturale nenule $x$, $y$, $z$ care verifică egalitatea :

$$x + \frac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \frac{30}{13}.$$

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1986, Rîmnicu-Vîlcea)*

**VIII.A.87.** Să se arate că pentru $k \in \mathbf{N}$, $k$ impar, numărul $N = 10^{3k} + 2^{3k}$ se divide cu 7.

*(I. Mitrache, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.88.** Fie $a$, $b$, $c$ numere întregi impare. Să se arate că nu există $x$ număr rațional care să verifice relația : $ax^2 + bx + c = 0$.

*(Etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.89.** Să se rezolve în numere întregi ecuația :

$$x(x+2)(x+4)(x+6) + 9 = y^2.$$

*(L. Pîrșan, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VIII.A.90.** Să se arate că pentru orice $n \geqslant 1$, $n \in \mathbf{N}$, numărul $A = \dfrac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2(n^2+2n-1) + 3$ este natural, multiplu de 3.

*(I. Mitrache, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VIII.A.91.** Fie polinoamele:

$$P(X) = X^5 + X^6 + X^7 + X^8 + X^9 \text{ şi}$$

$$Q(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

Dacă $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, $\alpha \neq -\beta$ şi este satisfăcută relaţia:

$$Q^2(\alpha) - Q(\alpha) + \frac{1}{2} = Q(\beta)\left[Q(\alpha) - \frac{1}{2}Q(\beta)\right],$$

arătaţi că $\dfrac{P^3(\alpha) + P^3(\beta)}{\alpha + \beta} \in \mathbf{Z}$.

*(I. Corolan, L. Mic, etapa republicană, 1989. Baia Mare)*

**VIII.A.92.** Fie $P(X) = X^2 + X + 1$ şi $N \geq 2$ întreg.

Se notează $A = P(1) \cdot P(2) \ldots P(N)$.

a) Să se arate că $P(A + k)$ este divizibil cu $P(k)$ pentru $1 \leq k \leq N$.

b) Să se determine 1 989 de numere naturale consecutive, $n_i$, astfel încît $P(n_i)$ să nu fie un număr prim, $1 \leq i \leq 1\,989$.

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

## INDICAŢII

**VIII.A.1.** Aplicaţi inegalitatea mediilor.

**VIII.A.2.** Transformaţi în forme echivalente condiţia din enunţ.

**VIII.A.3.** Ridicaţi la pătrat condiţia din enunţ.

**VIII.A.4.** Folosiţi metoda reducerii la absurd.

**VIII.A.5.** Grupaţi convenabil termenii din sumă.

**VIII.A.6.** Folosiţi inegalitatea $\dfrac{1}{n(n-1)} < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n+1)}$.

**VIII.A.7.** Folosiţi ridicarea la pătrat.

**VIII.A.8.** Grupaţi convenabil termenii.

**VIII.A.9.** b) Exprimaţi pe $a$ în funcţie de $b$ şi înlocuiţi în expresia simplificată a lui $F$.

**VIII.A.10.** Ridicaţi la pătrat prima condiţie.

**VIII.A.11.** Folosiţi grupări convenabile.

**VIII.A.12.** Presupuneţi $a \leq b < c$ şi folosiţi condiţiile din ipoteză.

**VIII.A.13.**
Folosiți condițiile din enunț scrise sub altă formă.

**VIII.A.14.** Ridicați la puterea a treia și treceți toți termenii în membrul stîng.

**VIII.A.15.** Folosiți valori particulare pentru $x$ și $y$, pentru a demonstra că $a$ este cel mai mic număr.

**VIII.A.16.** Pentru valori particulare încercați să ajungeți la o contradicție.

**VIII.A.17.** Rezolvați sistemul luînd ca necunoscute pe $f(2)$ și $f(3)$.

**VIII.A.18.**
b) Folosiți o valoare particulară convenabilă în relația dată.

**VIII.A.20.** Determinați legea funcției $f$.

**VIII.A.21.** Analog ca la problema precedentă.

**VIII.A.22.**
a) Rezolvați sistemul format de cele două relații din condiție.

**VIII.A.23.** Desfaceți parantezele și regrupați convenabil.

**VIII.A.24.** Găsiți un divizor comun pentru cele două polinoame.

**VIII.A.25.** Desfaceți parantezele și regrupați convenabil.

**VIII.A.26.** Folosiți teorema împărțirii cu rest.

**VIII.A.27.** Scrieți polinomul ca o sumă de două polinoame, fiecare în parte divizibil cu 6.

**VIII.A.28.** Formați un sistem din condițiile problemei.

**VIII.A.29.** a) Analizați după paritatea lui $n$.

**VIII.A.30.** Formați o ecuație din condiția problemei.

**VIII.A.31.** a) Transpuneți în relații matematice condițiile din ipoteză.

**VIII.A.32.** Notați $Q(X) = 1\,987X + 1$.

**VIII.A.33.** Folosiți teorema împărțirii cu rest.

**VIII.A.34.** a) Folosiți teorema împărțirii prin $X - a$.
b) Folosiți teorema împărțirii cu rest.

**VIIII.A.35.** Puneți în evidență polinoamele $P - Q$, $Q - R$, $R - P$.

**VIII.A.36.** a) Grupați convenabil termenii.

**VIII.A.37.** Scrieți că cele două polinoame sînt divizibile, primul prin al doilea, apoi folosiți teorema împărțirii cu $X - a$.

**VIII.A.38.** Împărțiți $P(X)$ la $Q(X)$ și folosiți condiția restului.

**VIII.A.39.** b) Rezolvați sistemul rezultat din condițiile $E(1) = E(-1) = 0$.

**VIII.A.41.** Folosiți teorema împărțirii cu rest.

**VIII.A.42.** a) Folosiți teorema împărțirii cu $X - a$.

**VIII.A.43.** a) Scrieți polinomul ca o sumă de pătrate.

**VIII.A.44.** a) Împărțiți numărătorul la numitor.

**VIII.A.45.** a) Desfaceți parantezele și regrupați convenabil.

**VIII.A.46.** b) Scrieți numitorul ca o sumă de două pătrate.

**VIII.A.47.** a) Folosiți teorema împărțirii cu $X - a$.

**VIII.A.48.** Simplificați mai întîi fracția.

**VIII.A.49.** a) Grupați convenabil termenii și folosiți factorul comun.

**VIII.A.50.** Analog ca la exercițiul precedent.

**VIII.A.51.** a) Analog ca la exercițiul precedent.

**VIII.A.52.** Analog ca la exercițiul precedent.

**VIII.A.54.** Descompuneți într-un produs de doi factori.

**VIII.A.55.** Rezolvați sistemul format din condițiile problemei.

**VIII.A.56.** $P(X)$ conține $Q(X)$ ca factor.

**VIII.A.57.** Folosiți teorema împărțirii cu $X - a$.

**VIII.A.58.** Exprimați prin relații matematice suma coeficienților unui polinom și suma alternantă a acestora.

**VIII.A.59.** Vom distinge cazurile $a - b \neq 1$ și $a - b = 1$.

**VIII.A.60.** Scrieți mai întîi faptul că suma numerelor este divizibilă cu două numere prime între ele.

**VIII.A.61.** Aduceți expresiile la o formă mai simplă și apoi folosiți semnul funcției de gradul I.

**VIII.A.62.** b) Folosiți rezultatul de la punctul a.

**VIII.A.63.** b) Folosiți formula radicalilor suprapuși.

**VIII.A.64.** b) Folosiți diferența de pătrate și factorul comun.

**VIII.A.65.** a) După ridicări la putere, identificați coeficienții și rezolvați sistemul format.

**VIII.A.66.** a) Scrieți condiția sub o formă echivalentă.

**VIII.A.68.** Scrieți egalitatea sub o formă echivalentă.

**VIII.A.69.** Scrieți membrul stîng ca un produs de doi factori.

**VIII.A.70.** Scrieți membrul stîng ca un produs de doi factori și formați sisteme de ecuații.

**VIII.A.71.** Exprimați o necunoscută în funcție de cealaltă.

**VIII.A.72.** Folosiți substituții convenabile.

**VIII.A.73.** Începeți prin a stabili cea mai mare valoare a lui $d$.

**VIII.A.74.** Scrieți expresia ca un produs de cinci factori.

**VIII.A.75.** b) Cu notații convenabile putem folosi rezultatul de la pct. a).

**VIII.A.77.** Împărțiți numărătorul la numitor.

**VIII.A.78.** Scrieți ecuația sub o formă echivalentă și folosiți factorul comun.

**VIII.A.79.** a) Rescrieți numărul sub o altă formă, pentru a putea grupa convenabil.

**VIII.A.80.** a) Pentru numărătorul și numitorul fracției, aceeași indicație ca la problema precedentă.

**VIII.A.81.** Scrieți ecuațiile sistemului sub forme echivalente.

**VIII.A.83.** Alegeți notații convenabile.

**VIII.A.84.** a) Desfaceți parantеza și regrupați convenabil.

**VIII.A.86.** Rescrieți egalitatea sub o formă echivalentă și folosiți faptul că numerele considerate sînt naturale nenule.

**VIII.A.87.** Adunați și scădeți 1.

**VIII.A.88.** Procedați prin reducere la absurd.

**VIII.A.89.** În membrul stîng „forțați" apariția unui binom sumă la pătrat.

**VIII.A.90.** Folosiți forma multiplilor lui 3.

**VIII.A.91.** Scrieți condiția din enunț ca o sumă de pătrate egală cu 0.

**VIII.A.92.** a) Calculați mai întîi $P(A+k)$.

# GEOMETRIE

## CAPITOLUL I

## PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU

**VIII.G.1.** În centrul de greutate $G$ al triunghiului isoscel $ABC$, de perimetru $2p$ și $m(\widehat{A}) = 120°$, se ridică perpendiculara $GM$ pe planul triunghiului. Fie $D$ piciorul medianei din $A$. Să se determine:

a) lungimea laturii $BC$;

b) distanța $d(M, (ABC))$ pentru care aria triunghiului $MAD$ este egală cu aria triunghiului $ABC$.

*(Etapa județeană, 1988, Bistrița-Năsăud)*

**VIII.G.2.** Fie $A, B, C, D$ patru puncte necoplanare.

Un plan $\alpha$ intersectează segmentele $AB, BC, CD, DA$ în punctele $L, M, N, P$ respectiv.

Să se demonstreze că:

a) $AL \cdot BM \cdot CN \cdot DP = BL \cdot CM \cdot DN \cdot AP$.

b) Dacă $AB \perp CD$, $AD \perp BC$, atunci există un punct $O$ egal depărtat de mijloacele segmentelor $AB, BC, CD, DA$.

*(Etapa județeană, 1988, Dolj)*

**VIII.G.3.** În același semispațiu determinat de planul triunghiului echilateral $ABC$ de latură $a$, se ridică în $A$ și $B$ perpendicularele $AM$ și $BN$ astfel încît $AM = 2BN$.

a) Calculați lungimea lui $BN$, astfel încît triunghiul $MCN$ să fie dreptunghic.

b) Dacă $BN = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$ aflați $\cos x$, unde $x$ este măsura unghiului plan al diedrului determinat de $ABC$ și $MCN$.

*(Etapa locală, 1988, Sibiu)*

**VIII.G.4.** În planul $\alpha$ se consideră un unghi drept $BAX$ ($m(\widehat{A}) = 90°$) și $AB = 2b$ (constant). În punctul $B$ se ridică o perpendiculară $BY$ pe planul unghiului $BAX$.

a) Dacă $C$ și $D$ sînt două puncte variabile $C \in Ax$, $D \in By$, astfel încît $CD = 2 \cdot a$ (constant), să se arate că suma : $S = AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2$ este constantă.

b) Dacă $O$, $N$, $M$, $P$ sînt mijloacele respectiv ale segmentelor $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$, să se arate că $ONMP$ este dreptunghi cu diagonala $OM$ de lungime constantă.

*(Etapa locală, 1988, Sibiu)*

**VIII.G.5.** Fie un triunghi echilateral $ABC$ de latură $a$, avînd centrul de greutate $G$.

a) Să se determine un plan $\alpha$ trecînd prin $BC$ astfel încît, notînd cu $A'$ proiecția lui $A$ pe $\alpha$, să rezulte că măsura unghiului $BA'C$ să fie egală cu $90°$.

b) Să se arate că dreapta $A'G$ este perpendiculară pe planul $ABC$ și să se calculeze lungimea lui $A'G$.

*(* * *, etapa republicană, 1984, Deva)*

**VIII.G.6.** O dreaptă intersectează două plane perpendiculare $\alpha$ și $\beta$ în punctele $A$ și respectiv $B$. Fie $A'$ și $B'$ proiecțiile punctelor $A$ și $B$ pe dreapta de intersecție a planelor $\alpha$ și $\beta$.

Știind că $AB = 2a$, $A'B' = a$ și că triunghiul $A'B'B$ este isoscel, să se determine :

a) Măsura unghiului format de dreapta $AB$ cu planul $\alpha$, cu planul $\beta$ și cu dreapta lor de intersecție.

b) Fie $M$ mijlocul lui $AB$. Să se demonstreze că $MA'B'$ este isoscel.

c) Să se calculeze ariile proiecțiilor triunghiului $MA'B'$ pe fiecare din cele două plane date $\alpha$ și $\beta$.

*(Etapa locală, 1987, Bacău)*

**VIII.G.7.** Fie patru puncte necoplanare, $A$, $B$, $C$, $D$, astfel încît $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $AD \perp AC$ și $AB \equiv AD$.

a) În cazul cînd $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$, să se calculeze distanța de la $A$ la planul $(BCD)$.

b) Să se deducă relațiile : $DB^2 - BC^2 = AC^2 + AB^2$ și $DB \equiv AC\sqrt{2}$.

*(Etapa județeană, 1988, Mehedinți)*

**VIII.G.8.** Dintr-un punct $A$ exterior unui plan, se duc perpendiculara $AO$ și oblicele $AB$, $AC$ față de acest plan, astfel încît $O$, $B$, $C$ nu sînt coliniare. Fie $H$ și $H'$ ortocentrele triunghiurilor $ABC$, respectiv $OBC$. Să se arate că dreapta $HH' \perp (ABC)$.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1986, Rîmnicu-Vîlcea)*

**VIII.G.9.** Pe planul pătratului $ABCD$ de latură $2a$ $(a > 0)$ în $B$, $C$ și $D$ se ridică perpendicularele $d_1$, $d_2$, $d_3$, pe care se consideră (în același semispațiu) segmentele $BN = a$, $CM = 2a$ și $DP = a$.

a) Să se arate că planul determinat de punctele $M$, $N$ și $P$ conține punctul $A$.

b) Să se afle aria triunghiului $MQS$, unde $Q$ este intersecția lui $MN$ cu $BC$ și $S$ este punctul de intersecție a lui $MP$ cu $DC$.

*(Etapa județeană, 1988, Hunedoara)*

## CAPITOLUL II

## POLIEDRE (PERPENDICULARITATE)

**VIII.G.10.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic isoscel $(AB = AC = a)$. În punctul $C$ se duce o perpendiculară pe planul triunghiului pe care se ia un punct $S$ astfel încît $SC = a$.

a) Dacă $CP \perp SB$ $(P \in SB)$, iar $Q$ este mijlocul segmentului $SA$, să se demonstreze că patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil.

b) Să se calculeze aria totală și volumul piramidei $SABC$ în funcție de $a$.

*(I. Diaconu, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VIII.G.11.** Se consideră rombul $ABCD$ în care diagonalele $AC$ și $BD$ se intersectează în $O$. Fie $VO$ perpendiculara în $O$ pe planul rombului.

a) Să se arate că $BD \perp VA$.

b) Să se determine raportul dintre volumele piramidelor $VABO$ și $VABCD$.

*(* * *, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VIII.G.12.** Fie $ABCD$ un tetraedru astfel încît $DA \perp DB$, $DA \perp DC$ și $DB \perp DA$.

a) Să se arate că pătratul ariei fetei $ABC$ este egal cu suma pătratelor ariilor fețelor $DAB$, $DAC$, $DBC$.

b) Ducem $DM \perp AB$ $(M \in AB)$ și $DN \perp AC$ $(N \in AC)$. Să se arate că patrulaterul $BCNM$ este inscriptibil.

*(* * *, etapa republicană, 1986, Rîmnicu Vîlcea)*

**VIII.G.13.** Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare și $M$ un punct pe muchia $AD$. Să se arate că raportul $\frac{AM}{MD}$ este egal cu raportul ariilor triunghiurilor $ABC$ și $DBC$ dacă și numai dacă $M$ este egal depărtat de fețele $ABC$ și $DCB$.

*(* * *, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.G.14.** Fie piramida $OABC$, în care $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Să se arate că :

a) Proiecția lui $O$ pe planul $(ABC)$ coincide cu ortocentrul $H$ al triunghiului $ABC$.

b) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

*(* * *, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VIII.G.15.** Fie $ABCD$ un tetraedru. Presupunem că perpendiculara $AE$, dusă din $A$ pe fața $BCD$, se intersectează cu perpendiculara $BF$ din $B$ pe fața $ACD$ într-un punct $G$.

a) Să se arate că perpendiculara $CK$ dusă din $C$ pe fața $ABD$, și perpendiculara $DL$, dusă din $D$ pe fața $ABC$, se intersectează într-un punct $M$.

b) Să se arate că dreapta $GM$ intersectează muchiile $AB$ și $CD$.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1986, Rîmnicu-Vilcea)*

**VIII.G.16.** Fie $ABCD$ un tetraedru în care $DA \perp (ABC)$, $BC \perp DC$ și $AB = 3 \cdot AC$. Să se demonstreze că măsura unghiului diedru dintre $(DBC)$ și $(ADB)$ este de $30°$ dacă și numai dacă $2 \cdot DB = 3 \cdot DC$.

*(C. Hărăbor, I. Diaconu, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VIII.G.17.** Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are muchiile $AB = AA' = a$ și $BC = a \cdot \sqrt{2}$. Aflați :

a) Distanța de la muchia $AB$ la diagonala $B'D$.

b) Aria minimă și aria maximă a triunghiului $MB'D$, cînd $M$ este punct variabil pe muchia $AB$, precizînd de fiecare dată poziția lui $M$ pe $AB$.

*(Etapa județeană, 1988, Sibiu)*

**VIII.G.18.** Se consideră o prismă patrulateră regulată dreaptă $ABCDA'B'C'D'$. Să se demonstreze că dacă planele $(ABD')$ și $(CDA')$ sînt perpendiculare, atunci prisma considerată este cub.

*(Etapa locală, 1988, Giurgiu)*

**VIII.G.19.** Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ având toate cele opt muchii de lungime $a$. Fie $C_1$ mijlocul segmentului $CV$ și $\mathcal{C}$ cercul înscris în triunghiul $VBC$.

a) Să se arate că planele $BDC_1$ și $VBC$ sînt perpendiculare.

b) Dacă $M$ este un punct oarecare pe cercul $\mathcal{C}$ și $N$ un punct oarecare pe diagonala $BD$ a bazei, să se determine minimul posibil al lungimii segmentului $MN$.

*(O. Stănășilă, etapa republicană, 1988, Brașov)*

**VIII.G.20.** Pe muchiile $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$ ale unui tetraedru oarecare $VABC$, se iau respectiv punctele $M$, $N$, $P$ astfel încît $VM = m$, $VN = n$, $VP = p$. Să se arate că raportul volumelor tetraedrelor $VMNP$ și $VABC$ este $\frac{m \cdot n \cdot p}{a \cdot b \cdot c}$.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1983, Pitești)*

## CAPITOLUL III

## POLIEDRE (PARALELISM)

**VIII.G.21.** Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie $a$ și $M$ un punct interior segmentului $AC$. Ducem prin $M$ planul paralel cu muchiile $AB$ și $CD$, care intersectează muchiile $BC$, $BD$ și $AD$, respectiv în $N$, $P$ și $Q$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi și să se determine $x = AM$ astfel încît aria lui $MNPQ$ să fie maximă.

*(V. Brânzănescu, D. Barșai, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.A.G.22.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie $a$ și picioarele $M$ și $N$ ale perpendicularelor din $D'$ și respectiv $B$ pe diagonala $B'D$. Demonstrați că :

a) Patrulaterul $BND'M$ este paralelogram.

b) Lungimea segmentului $MN$ este o treime din lungimea segmentului $B'D$.

*(M. Trifu, I. Diaconu, etapa republicană, 1986, Rîmnicu Vilcea)*

**VIII.G.23.** În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, diagonala $A'C$ intersectează planul $AB'D'$ în $E$.

a) Să se arate că $CE = 2 \cdot A'E$.

b) Să se demonstreze că semidreptele $C'E$, $B'E$, și $D'E$ trec respectiv prin mijloacele segmentelor $AA'$, $AD'$, $AB'$.

c) Planele $AB'D'$ și $C'DB$ sînt paralele.

d) Aflați valoarea raportului $\frac{V(A'AB'D') + V(CBDC')}{V(ABDD'B'C')}$, unde „$V$“ reprezintă „volum“.

*(M. Trifu, I. Diaconu, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.G.24.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie $a$ se notează cu $M$, $N$ mijloacele muchiilor $AB$, respectiv $AD$, iar cu $E$, $F$, mijloacele muchiilor $B'C'$, respectiv $C'D'$.

a) Să se demonstreze că planele $A'MN$ și $CEF$ sînt paralele.

b) Să se calculeze distanța dintre planele $A'MN$ și $CEF$.

*(M. Trifu și I. Diaconu, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.G.25.** Se dă paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ cu fețele rombului. Perpendiculara din $C$ pe planul $AB'D'$ intersectează planul $BDC'$ în $E$. Stabiliți dacă $E$ se află la egală distanță de punctele $B$, $D$, $C'$.

*(Etapa municipală, 1987, București)*

**VIII.G.26.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură $a$. Să se arate că planele $A'BD$ și $CB'D'$ sînt paralele și să se calculeze distanța dintre ele.

*(* * *, etapa republicană, 1984, Deva)*

**VIII.G.27.**

a) Prin muchia $CD$ a tetraedrului oarecare $ABCD$ se duce planul $\alpha$ paralel cu muchia opusă $AB$, iar prin muchia $BD$ se duce planul $\beta$ paralel cu muchia opusă $AC$. Să se arate că dreapta ce unește mijlocul $M$ al muchiei $BC$ cu mijlocul $N$ al muchiei $AD$ este paralelă cu planele $\alpha$ și $\beta$.

b) Fie $\pi$ un plan oarecare perpendicular pe dreapta de intersecție a planelor $\alpha$ și $\beta$. Să se arate că proiecțiile $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ ale punctelor $A$, $B$, $C$, $D$ pe planul $\pi$ sînt vîrfurile unui paralelogram.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1985, Tulcea)*

## CAPITOLUL IV

## POLIEDRE (SECȚIUNI)

**VIII.G.28.** O prismă dreaptă are ca bază un triunghi echilateral cu latura $AB = a$ și înălțimea prismei este $AA' = a$. Fie $D \in AB$ și $AD = \frac{2}{3} \cdot a$. Se duce $DE \parallel BC$ ($E \in AC$).

a) Să se determine intersecția prismei cu planul $P$ determinat de dreapta $DE$ și punctul $A'$.

b) Să se afle aria acestei secțiuni.

c) Să se afle unghiul diedru format de planele $P$ și $ABC$.

*(* * *, etapa republicană, 1980, București)*

**VIII.G.29.** Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Un plan $\alpha$ ce trece prin punctul $A$ intersectează muchiile $BB'$, $CC'$, $DD'$ respectiv în punctele $M$, $P$, $N$. Presupunînd $AB = 4\sqrt{5}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $CC' = 3\sqrt{15}$, să se determine poziţiile punctelor $M$ şi $N$ astfel ca patrulaterul $AMPN$ să fie romb, iar lungimile segmentelor $MB$ şi $ND$ să fie exprimate prin numere naturale.

*(Olimpia Popescu, etapa republicană, 1983, Piteşti)*

**VIII.G.30.** Fie $OABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vîrful $O$. Prin muchia $AB$ se duce un plan oarecare $\alpha$ care intersectează muchiile $OC$, $OD$ în $M$, respectiv $N$.

a) Să se arate că $ABMN$ este trapez isoscel.

b) Să se arate că aria triunghiului $OBM$ este media geometrică între ariile triunghiurilor $OAB$ şi $OMN$.

*(V. Brânzănescu, etapa republicană, 1987, Bacău)*

**VIII.G.31.** Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ în care toate cele opt muchii au lungimea $a$. Să se determine ariile tuturor secţiunilor plane egal depărtate de punctele $V$, $A$, $B$, $C$, $D$.

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VIII.G.32.** Se consideră un corp geometric $MNABCD$ care are ca feţe : dreptunghiul $ABCD$, trapezele $ABMN$, $CDMN$ şi triunghiurile $ADM$, $BCN$. Dimensiunile dreptunghiului $ABCD$ sînt $8a$ şi $4a$. Prin secţiune cu un plan paralel cu $ABCD$ s-a obţinut un dreptunghi $A'B'C'D'$ ($A' \in MA$, $B' \in NB$ etc.) de dimensiuni $5a$ şi $3a$. Să se determine lungimile $AB$, $AC$, $A'B'$, $B'C'$, $MN$ ştiind că $MN < AB$. Argumentaţi răspunsul.

*(* * *, etapa republicană, 1980, Bucureşti)*

**VIII.G.33.** Fie un triedru astfel încît $Ox \perp Oz$, $Oy \perp Oz$ şi $m(\widehat{xOy}) = \alpha^0$, $0^\circ < \alpha^0 \leqslant 90^\circ$. Pentru ce $\alpha^0$ există un plan care să secţioneze triedrul după un triunghi echilateral ?

*(O. Stănăşilă, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

**VIII.G.34.** Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare, $E$ mijlocul lui $AC$ şi $F$ mijlocul lui $BD$. Un plan $\pi$ taie muchiile $AB$, $BC$, $CD$, $AD$ respectiv în punctele $M$, $N$, $P$, $Q$. Să se arate că :

a) $MNPQ$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\pi$ este paralel cu $AC$ şi $BD$.

b) Dacă $MNPQ$ este paralelogram, atunci centrul său $O$ aparţine segmentului $EF$ şi reciproc, orice punct $O$ de pe segmentul $EF$ este centrul unui paralelogram $MNPQ$ (ca la punctul a).

c) Fie $q$ un plan oarecare perpendicular pe $EF$. Atunci proiecţiile punctelor $A$, $B$, $C$, $D$ pe planul $q$ sînt vîrfurile unui paralelogram.

*(* * *, etapa republicană, 1989, Baia Mare)*

## INDICAȚII

**VIII.G.1.**

a) Triunghiul $ABC$, fiind isoscel și având unghiul din $A$ de $120°$, atunci laturile congruente pot fi numai : $AB \equiv \ldots$ Cercetați care este mărimea unghiului dintre dreptele $AD$ și $BC$, dar și dintre $AD$ și $AC$.

b) $GM$ este înălțime în triunghiul $MAD$, baza lui fiind $AD$... etc....

**VIII.G.2.**

a) Folosiți proprietatea pe care o are o transversală care intersectează laturile un triunghi $ABC$ de exemplu în punctele $T \in BC$ ($C$ între $B$ și $T$), $M \in AC$ ($M$ între $A$ și $C$), $N \in AB$ ($N$ între $A$ și $B$).

Proprietatea este :

$\frac{TC}{TB} \cdot \frac{NB}{NA} \cdot \frac{MA}{MC} = 1$ și poartă numele de teorema lui Menelaos.

b) Un tetraedru ortogonal este tetraedrul în care cele trei perechi de muchii opuse sînt perpendiculare. Dacă două perechi de muchii opuse sînt perpendiculare, tetraedrul este ortogonal (demonstrați). Dovediți că într-un tetraedru ortogonal unind mijloacele a două perechi de muchii opuse se obține un dreptunghi. Consultați „Culegere de probleme de geometrie sintetică și proiectivă", de N. N. Mihăileanu, și anume Cap. „Poliedre", probl. 16, pag. 346.

**VIII.G.3.**

a) Observați că triunghiul $MCN$ este isoscel. Atunci unghiul drept este...

b) Pentru a evidenția unghiul plan corespunzător diedrului determinat de planele $ABC$ și $MNC$, determinați dreapta de intersecție dintre aceste două plane și apoi intersectați planele $ABC$ și $MNC$ cu un plan perpendicular pe dreapta lor de intersecție.

**VIII.G.4.**

a) Aplicați, în triunghiuri dreptunghice convenabil alese, teorema lui Pitagora.

b) Observați că $ONMP$ este un paralelogram cu un unghi drept și că triunghiul $AMB$ este isoscel.

**VIII.G.5.**

a) Presupuneți că ați determinat planul $\alpha$. Atunci $m(\widehat{BA'C}) = 90°$ devine ipoteză suplimentară. În această ipoteză, determinați unghiul plan corespunzător diedrului determinat de $\alpha$ și $ABC$, și apoi deduceți cum „construim" planul $\alpha$.

b) În ipoteza suplimentară $m(\widehat{BA'C}) = 90°$, observați că $G$ este egal depărtat de punctele $A$, $B$ și $C$ ; urmează calculul lungimii $A'G$ dintr-un triunghi dreptunghic convenabil ales.

**VIII.G.6.**

a) Fie $A \in \alpha$ și $B \in \beta$. Atunci $AB'$ este proiecția lui $AB$ pe $\alpha$ și $BA'$ este proiecția lui $AB$ pe $\beta$.

Triunghiul $BB'A'$ este isoscel : $BB' \equiv A'B'$ (de ce ?).

Evaluați măsura unui unghi format de $AB$ și o paralelă la $A'B'$.

b) $MB'$ și $MA'$ sînt mediane în două triunghiuri dreptunghice.

c) Fie $M_1$ și $M_2$ proiecțiile punctului $M$ pe $\alpha$ și respectiv $\beta$. Observați că $\sigma\triangle BB'A' = 2 \cdot \sigma\triangle B'M_2A'$ (de ce ?).

**VIII.G.7.**

a) În planul $BCD$ duceți $BE \perp BC$ și apoi $AA' \perp BE$ ($A' \in BE$). Cercetați dacă $AA' \perp (BCD)$. Stabiliți că în patrulaterul $BCDA'$, $BD$ este bisectoarea unghiului $CDA'$.

b) Folosiți notațiile propuse la punctul a) și aplicați teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice cunoscute din ipoteză.

**VIII.G.8.** Observați că $(AOC) \perp (OBC)$ (de ce ?) și $BH' \perp (AOC)$ (de ce ?). Atunci planul fiind $AOC$ și punctul exterior planului $AOC$ fiind $B$, aplicați teorema celor trei perpendiculare. Deduceți că planele $BHH'$ și $CHH'$ sînt perpendiculare pe $(ABC)$.

Mai observați, dacă $H' = O$, tetraedrul este dreptunghic în $O$ și deci : într-un tetraedru dreptunghic în care $AO \perp (OBC)$ și $OC \perp OB$, punctul $O$ se proiectează pe planul $ABC$ în ortocentrul triunghiului $ABC$.

**VIII.G.9.**

a) Notînd cu $Q$ intersecția dreptelor $MN$ și $BC$ și $S$ intersecția dreptelor $MP$ și $CD$, arătați că o mediană a triunghiului $CQS$ coincide cu o diagonală a pătratului $ABCD$.

b) Pentru calculul ariei triunghiului $MQS$ folosiți ca bază segmentul $SQ$.

**VIII.G.10.**

a) În triunghiul $SAB$, calculați rapoartele $\frac{SQ}{SB}$ și $\frac{SP}{SA}$, sau observați că $CQ \perp SA$ (de ce ?) și $CQ \perp AB$ (de ce ?) și deci...

b) Triunghiul $SAB$ este dreptunghic.

**VIII.G.11.**

a) Țineți cont că diagonalele rombului sînt perpendiculare.

b) Diagonalele rombului împart rombul în patru triunghiuri dreptunghice congruente.

**VIII.G.12.**

a) Notați, de exemplu, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$. Duceți $DE \perp BC$ ($E \in BC$) și calculați $BC$ și $AE$.

b) Calculați $AB$, $AC$, $AM$ și $AN$ și observați că în triunghiul $ABC$, $MN$ este antiparalelă. Sau aplicați teorema celor trei perpendiculare, de exemplu față de planul $ADC$. Va rezulta $BN \perp AC$, etc...

**VIII.G.13.** Directa : Dacă în tetraedrul $ABCD$, $\frac{AM}{MD} = \frac{\sigma ABC}{\sigma DBC}$, unde $M \in AD$, atunci $d_1 = d_2$, unde $d_1$ și $d_2$ sînt distanțele de la $M$ la $ABC$ și respectiv $BCD$.

Proiectați $AD$ pe planul $MBC$ și calculați raportul volumelor tetraedrului $ABCM$ și $DBCM$.

Reciproca : Dacă în tetraedrul $ABCD$ $d_1 = d_2$, atunci $\frac{AM}{MP} = \frac{\sigma ABC}{\sigma DBC}$, unde $d_1$ și $d_2$ sînt distanțele de la $M \in AD$ la planele $ABC$ și respectiv $BCD$.

**VIII.G.14.**

a) Fie $OO' \perp (ABC)$ $(O' \in (ABC)$. Arătați că $BC \perp AO'$ etc.

b) De exemplu, în triunghiul dreptunghic $BOC$ duceți $OA_1 \perp BC$ și demonstrați că $\frac{1}{OA_1^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Spunem că în triunghiul dreptunghic $BOC$ relația de mai sus „caracterizează" piciorul $A_1$ al înălțimii triunghiului, relativă ipotenuzei.

Consultați „Planul și spațiul euclidian", de Dan Brînzei, și anume capitolul Tetraedre dreptunghice, pag. 245.

**VIII.G.15.**

a) Arătați că planul determinat de înălțimile $AE$ și $BF$ ale tetraedrului $ABCD$ este perpendicular pe muchia $CD$. Duceți prin $CD$ un plan perpendicular pe muchia $AB$ și dovediți că $CK$ și $DL$ sînt conținute în acest plan ; prin urmare, punctul $M$ este...

b) Cercetați care este dreapta de intersecție dintre planul care conține muchia BC și este perpendicular pe muchia $CD$ și planul care conține muchia $CD$ și este perpendicular pe muchia $AB$ etc....

**VIII.G.16.** De exemplu, presupuneți propoziția directă. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $DA \perp (ABC)$, $BC \perp DC$, $AB = 3 \cdot AC$ și $2 \cdot DB = 3 \cdot DC$. Atunci măsura unghiului diedru dintre $(DBC)$ și $(ADB)$ este de 30°. Pentru a pune în evidență unghiul plan al acestui diedru, duceți pe muchia $BD$ a diedrului, un plan perpendicular. Evident, acest plan este perpendicular atît pe $(DBC)$, cît și pe $(DBA)$.

**VIII.G.17.** Distanța dintre două drepte oarecare $d_1$ și $d_2$ este lungimea unui segment care are proprietatea de a fi perpendicular pe $d_1$ și respectiv pe $d_2$, capetele lui aparținînd lui $d_1$ și respectiv $d_2$. Acest segment este unic. S-a convenit ca acest segment să se numească „distanța" dintre dreptele $d_1$ și $d_2$. Oricare alt segment care are capetele pe $d_1$ și respectiv $d_2$ are o lungime mai mare decît a segmentului „distanță".

Distanța dintre dreptele oarecare $d_1$ și $d_2$ se construiește astfel : se fixează — de exemplu — pe $d_1$ un punct $R$. Prin $R$ ducem $d'_2 \parallel d_2$. Se proiectează $d_2$ pe planul $(d_1, d'_2)$. Fie $d''_2$ această proiecție.

Notăm $N$ intersecția dintre $d''_2$ și $d_1$. În planul $(d''_2, d_2)$ ducem $NM \perp d''_2$, unde $M \in d_2$. Segmentul $NM$ este distanța dintre $d_1$ și $d_2$. De ce ?

b) Triunghiul $MB'D$, cînd $M$ „descrie" segmentul $AB$ are „baza" $B'D$ de lungime constantă. Înălțimea relativă bazei $B'D$ are lungimea variabilă și pentru o „anumită" poziție a lui $M$ pe $AB$, lungimea înălțimii va fi cea mai mică. Dacă $M = B$, triunghiul este $BB'D$ și este dreptunghic. Dacă $M = A$, triunghiul este $AB'D$ și de asemenea este dreptunghic.

**VIII.G.18.** Demonstrați că dreapta de intersecție dintre planele $ABD'$ și $CDA'$ este perpendiculară — de exemplu — pe planul $BB'CC'$ (De ce ?).

**VIII.G.19.**

a) Arătați că planul $DC_1B$ conține două drepte concurente perpendiculare pe o dreaptă conținută în planul $VBC$ (care ?).

b) Odată rezolvat punctul a), încadrați segmentul variabil $MN$ într-un triunghi dreptunghic (probabil vîrful unghiului drept va aparține dreptei de intersecție dintre planele perpendiculare $VBC$ și $DC_1B$).

**VIII.G.20.** Gîndiți, de exemplu, tetraedrele $VMNP$ și $VABC$ cu vîrful în $M$ și respectiv $A$. Atunci planul care conține muchia $VA$ și este perpendicular pe $VBC$ va conține și înălțimile tetraedrelor $MVNP$ și $AVBC$. Exprimați „trigonometric" ariile triunghiurilor $VNP$ și $VBC$.

**VIII.G.21.** Întîi demonstrați că $MNPQ$ are laturile paralele, apoi demonstrați că în tetraedrul $ABCD$ muchiile opuse sînt perpendiculare.

Notați $AC = a$ (lungime constantă). $MC = y$. Deoarece $AM = x$, urmează că $x + y = a$ (constant).

Pe segmentul $AC = x + y = a$, ca diametru, construiți un semicerc și dați o interpretare geometrică produsului $x \cdot y$.

**VIII.G.22.**

a) Problema se rezolvă în planul diagonal $DD'BB'$, care este un dreptunghi cu diagonala $DB' = a\sqrt{3}$. Arătați că $D'M$ și $BN$ sînt paralele și congruente.

b) Relații metrice în triunghiurile dreptunghice $DD'B'$ și $B'BD$.

**VIII.G.23.**

a) Pentru a localiza punctul $E$, căutați dreapta de intersecție dintre $(AB'D')$ și planul diagonal $AA'CC'$.

b) Notați — de exemplu — cu $O'$ intersecția diagonalelor dreptunghiului $A'B'C'D'$ și folosiți poligonul $AA'CC'$. Astfel, în triunghiul $AA'C$, $AO'$ este mediană și notînd $M$ intersecția diagonalelor $AC'$ și $CA'$, observați că și $A'M$ este mediană etc....

c) Căutați două drepte concurente din $(AB'D')$, care să fie paralele cu două drepte concurente din $(C'DB)$.

d) Notați $a$, $b$, $c$ dimensiunile paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$ și observați că $V(ABDD'B'C') \equiv V(ABCDA'B'C'D') - 2 \cdot V(A'AB'D')$, unde „$V$" reprezintă „volum".

**VIII.G.24.**

a) Căutați două drepte concurente din $(A'NM)$, care să fie paralele cu două drepte concurente din $(CEF)$.

b) De exemplu, notați $\{P\} = FE \cap C'A'$ și $\{Q\} = MN \cap CA$, apoi duceți o perpendiculară din $P$ pe $A'Q$ (de ce ?).

**VIII.G.25.** Arătați că planele $AB'D'$ și $BD'C'$ sînt paralele și apoi observați că $CC' \equiv CB \equiv CD$ (ipoteză).

**VIII.G.26.** Stabiliți două drepte concurente din planul $A'BD$ paralele cu două drepte concurente din planul $CD'B'$ (de ce ?).

Duceți $AG_1 \perp (A'BD)$ ($\{G_1\} \in (A'BD)$), notați $AG_1 \cap (D'B'C) = \{G_2\}$ și cercetați dacă $AG_2 \perp (D'B'C)$, $C'G_2 \perp (D'B'C)$. Comparați triunghiurile $AG_1B$ și $C'G_2C$.

**VIII.G.27.** De exemplu, construiți $CE \parallel BA$. Atunci $AB \parallel (CED)$, Deoarece $CE$ este unică, planul $CED$ este identic cu $\alpha$. Notați $P$ mijlocul lui $BD$. Cercetați dacă planele $MNP$ și $CED$ sînt sau nu paralele... etc.

Pentru construcția planului $\beta$, procedăm asemănător cu construcția planului $\alpha$, ducînd de exemplu $BF \parallel AC$. Atunci $AC \parallel (FBD)$... etc... Notați $R$ mijlocul lui $AB$ și cercetați dacă planele $MRN$ și $BFD$ sînt, sau nu, paralele... etc.

b) Fie $xy$ dreapta de intersecție dintre $\alpha$ și $\beta$. Atunci $xy \parallel MN$ (de ce ?), iar planul $\pi$ va fi perpendicular pe $MN$. Notați $O$ proiecțiile punctelor $M$ și $N$ pe planul $\pi$. Deducem că proiecțiile $A'$ și $B'$ ale punctelor $A$ și $B$ pe planul $\pi$ sînt puncte simetrice față de $O$ (de ce ?) etc....

**VIII.G.28.**

a) Deoarece $A' \notin DE$, planul $P$ există. Pentru a determina poligonul de secțiune dintre planul $P$ și unele fețe ale prismei, căutați cîte două puncte care să fie comune atît planului $P$, cît și fețelor prismei $ABCA'B'C'$.

b) Rezultă din precedenta.

c) Deoarece dreapta $DE$ este inclusă atît în $P$ cît și în $(ABC)$, duceți prin $AA'$ un plan $Q$ perpendicular pe dreapta $DE$ (de ce ?).

**VIII.G.29.** Observați că $AMPN$ este paralelogram (de ce ?).

Notați de exemplu $BM \equiv x$, $CP \equiv y$, $AN = z$ și, presupunînd $AMPN$ romb, rezultă, de exemplu, $AM \equiv AN$. În continuare, aplicați teorema lui Pitagora în triunghiuri dreptunghice convenabil alese și țineți cont de ipoteza ca lungimile segmentelor $BM$ și $DN$ să fie exprimate prin numere naturale.

**VIII.G.30.**

a) Demonstrați că $AB \parallel MN$ și $BM \equiv AN$.

b) Rezolvați următoarea problemă pregătitoare. Fie $ABC$ un triunghi isoscel ($BC$ bază) și $MN \parallel BC$ ($M \in AB$ și $N \in AC$).

Să se demonstreze că aria triunghiului $ANB$ este media geometrică între ariile triunghiurilor $ABC$ și $AMN$.

**VIII.G.31.** Să notăm $\pi_1$ un plan egal depărtat de $A$, $B$, $C$, $D$. Atunci $\pi_1 \parallel (ABCD)$. Dacă dorim ca și punctul $V$ să aibă aceeași depărtare ca și punctele $A$, $B$, $C$, $D$ față de $\pi_1$, atunci $\pi_1$ va trece prin mijloacele muchiilor $VA$, $VB$, $VC$, $VD$. De ce ?

Se mai poate duce un alt plan $\pi_2 \parallel (VAB)$ și astfel punctele $V$, $A$, $B$ vor fi la aceeași distanță față de $\pi_2$ ca și punctele $C$ și $D$. Atunci $\pi_2$ va trebui să intersecteze muchiile $BC$, $AD$, $VC$ și $VD$ în mijlocul lor.

Prin analogie se mai pot găsi încă trei plane de acest fel.

**VIII.G.32.** Construiți $NE \parallel MA$ ($E \in AB$), și demonstrați că triunghiurile $NE'B'$ și $NEB$ (unde $E' \in A'B'$) sînt asemenea. Deduceți că raportul de asemănare — de exemplu $\frac{B'C'}{BC}$ permite calculul segmentului $MN$ în funcție de $a$. Soluția acceptată este aceea pentru care $MN < AB$ și $MN > O$ (ipoteză).

**VIII.G.33.**

1. Observați că dacă $\alpha = 90°$, atunci triedrul devine dreptunghic și luînd $M \in Ox$, $N \in Oy$, $P \in Oz$ astfel încît $OM \equiv ON \equiv OP$, atunci triunghiul $MNP$ este echilateral (De ce ?).

2. Mai observați că într-un triunghi dreptunghic — de pildă — $ABC$, $m(\widehat{A}) = 90°$, presupunînd o catetă de lungime constantă — de exemplu $AB$ —, atunci unghiul ascuțit $\alpha° = m(\widehat{ABC})$ crește cu cît se mărește raportul $\frac{AC}{AB}$, și care este de fapt... și se micșorează cu cît acest raport se micșorează. Așadar, urmăriți variația funcției trigonometrice...

**VIII.G.34.**

a) De exemplu, propoziția directă poate fi $ABCD$ tetraedru și $\pi \parallel AC$ și $\pi \parallel BD$, atunci, conform textului, $MNPQ$ (inclus în $\pi$) este paralelogram.

Reciproca : $ABCD$ tetraedru și conform textului, $MNPQ$ este paralelogram, atunci planul $MNPQ$ ($\pi$) este paralel cu $AC$ și cu $BD$.

Pentru directă — deoarece $\pi \parallel AC$, $\pi$ taie planul $ABC$ după o dreaptă paralelă cu $AC$... etc....

Pentru reciprocă : Metoda reducerii la absurd, și anume presupuneți că planul $\pi$ nu este paralel cu $AC$ ; atunci planul $\pi$ intersectează planele $ACB$ și $ACD$ după două drepte care nu sînt paralele și deci sînt concurente — de exemplu în $S$, unde $S \in AC$ etc....

b) Presupunînd $MNPQ$ paralelogram, arătați că mijlocul segmentului care unește mijloacele laturilor paralele $MN$ și $PQ$ aparține lui $EF$.

Reciproc : Duceți prin mijlocul segmentului $EF$ două drepte respectiv paralele cu $AC$ și $BD$.

c) Deoarece $q \perp EF$, evident și $EF \perp q$. Atunci orice plan $\beta$ care conține dreapta $EF$ va fi un plan perpendicular pe $q$. Notați $O'$ piciorul perpendicularei $EF$ pe planul $q$ și căutați două plane perpendiculare pe $q$.

# CUPRINS


Pag.

*Cuvînt înainte* de acad. N. Teodorescu . . . . . 3

**Clasa a V-a**

Capitolul I. Numere naturale . . . . . 9
I.1. Ordinea operațiilor . . . . . 9
I.2. Probleme care se pot rezolva prin metoda figurativă . . . . . 10
I.3. Probleme cu privire la teorema împărțirii cu rest . . . . . 11
Capitolul II. Utilizarea literelor în calcul . . . . . 12
II.1. Mulțimi . . . . . 13
II.2. Factor comun . . . . . 13
II.3. Ecuații în N . . . . . 14
Capitolul III. Divizibilitatea numerelor naturale . . . . . 14
III.1. Criterii de divizibilitate . . . . . 14
III.2. Numere prime. Numere prime între ele . . . . . 17
III.3. Descompunere în factori . . . . . 17
III.4. Divizori comuni. Multipli comuni . . . . . 18
Capitolul IV. Numere raționale pozitive . . . . . 19
Indicații . . . . . 26

**Clasa a VI-a**

**Algebră :**

Capitolul I. Numere naturale. Divizibilitatea numerelor naturale . . . . . 35
Capitolul II. Rapoarte și proporții . . . . . 37
Capitolul III. Numere întregi. Numere raționale. Extragerea rădăcinii pătrate 40
Indicații . . . . . 45

**Geometrie :**

Capitolul I. Triunghiuri . . . . . 49
Capitolul II. Paralelism . . . . . 50
Capitolul III. Suma unghiurilor unui triunghi . . . . . 53

Pag.

Capitolul IV. Simetria . . . . . 56
Capitolul V. Patrulatere . . . . . 57
Indicații . . . . . 58

**Clasa a VII-a**

**Algebră :**

Capitolul I. Numere întregi, raționale și iraționale . . . . . 69
Capitolul II. Funcții . . . . . 72
Capitolul III. Calcul algebric. Aplicații ale calculului algebric . . . . 74
Capitolul IV. Identități. Inegalități . . . . . 77
Capitolul V. Calcul de sume . . . . . 79
Capitolul VI. Ecuații . . . . . 80
Indicații . . . . . 81

**Geometrie :**

Capitolul I. Proprietăți ale triunghiurilor . . . . . 88
Capitolul II. Cercul . . . . . 89
Capitolul III. Triunghiuri asemenea . . . . . 92
Capitolul IV. Relații metrice . . . . . 96
Capitolul V. Inegalități . . . . . 100
Indicații . . . . . 103

**Clasa a VIII-a**

**Algebră :**

Capitolul I. Inegalități . . . . . 119
Capitolul II. Funcții . . . . . 121
Capitolul III. Polinoame. Fracții raționale . . . . . 122
Capitolul IV. Diverse . . . . . 128
Indicații . . . . . 133

**Geometrie :**

Capitolul I. Perpendicularitate în spațiu . . . . . 137
Capitolul II. Poliedre (perpendicularitate) . . . . . 139
Capitolul III. Poliedre (paralelism) . . . . . 141
Capitolul IV. Poliedre (secțiuni) . . . . . 142
Indicații . . . . . 144